

TD du chapitre 5 : Séries entières
Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ et étudier la convergence au bord du disque de convergence pour :

a. $a_n = \frac{i^n n^2}{(n^2 + 1)2^n}$.

b. $a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n}$.

c. a_n est le $n^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule de $\sqrt{2}$ (avec $a_0 = 1$).

d. $a_n = \ln \left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right)$.

e. a_n est l'unique solution réelle de $x^3 + nx - 1 = 0$.

f. $a_n = \ln n$ (en considérant $(1-x)f(x)$, on donnera un équivalent en 1 de la somme $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$).

On étudiera les trois dernières sur \mathbb{R} .

Exercice 2

1) Déterminer le rayon de convergence, le domaine de convergence et calculer la somme f de $\sum a_n x^n$ pour :

a. $a_n = \frac{n^3 + n + 3}{n+1}$ b. $a_n = \frac{(n+1)^2}{n!}$ c. $a_n = \frac{1}{n - (-1)^n}$ d. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n}$ (établir : $2f = (1+4x)f'$).

2) Déterminer la somme de la série $\sum a_n$ pour :

a. $a_n = \frac{2^n + 3^n n}{5^n n(n-1)}$. b. $a_n = \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 3

1) Développer les fonctions suivantes en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence.

a. $f : x \mapsto \frac{\sin 4x}{\sin x}$.

b. $f : x \mapsto \frac{1}{x^4 - 3x^2 + 2}$.

c. $f : x \mapsto \arctan \left(\frac{1+x}{1-x} \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)$ ($\alpha \in]0; \pi[$). ☺ On pourra commencer par f' .

2) Montrer que $f : x \mapsto \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{ch} x - 1}$ est prolongeable par continuité en une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 4

Soit $(b, c) \in \mathbb{C}^2$. On note (E) l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$.

- 1) On suppose que l'équation (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, que l'on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Etablir une relation de récurrence sur les a_n .
- 2) Déterminer alors toutes les suites vérifiant la relation de récurrence établie ci-dessus pour $c = -b - 1$.

Exercice 5

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. On note f la somme de la série.

- 1) Dans cette question, on suppose que les a_n sont des réels positifs, que $R = 1$ et que f est bornée sur $]0; 1[$.
 - a. Montrer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n$.
 - b. Ce résultat subsiste-t-il quand les a_n sont de signe quelconque ?
- 2) Dans cette question, on veut prouver le Théorème d'Abel qui dit que :

Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

- a. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $R = 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

Dans la suite, on suppose que les deux conditions ci-dessus sont réalisées.

- b. On pose $S_{-1} = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$ et tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N (S_n - S_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^N S_n (x^n - x^{n+1}) + S_N x^{N+1}.$$

- c. En déduire que pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ et conclure.

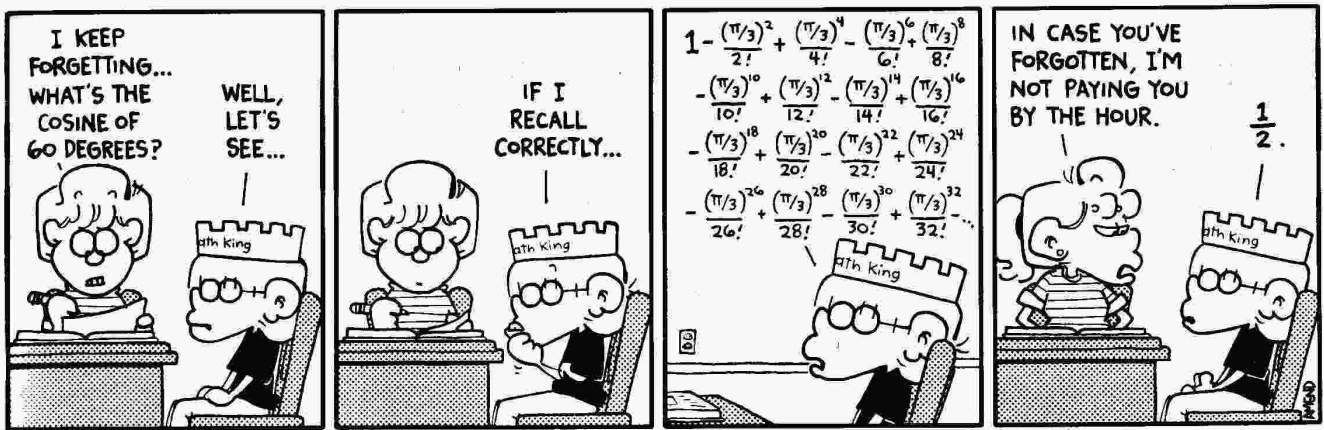
Exercice 6

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- 1) On suppose que $a_0 = 1$.
 - a. Prouver qu'il existe une unique suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $c_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} = 0$.
 - b. Soit $r \in]0; R[$. Justifier qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n r^n| \leq M$.
Les réels r et M ainsi fixés, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|c_n| \leq \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.
 - c. En déduire que $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence non nul. Que conclure ?
- 2) Soit $\sum b_n x^n$ une autre série entière réelle de rayon de convergence 1 et de somme $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$, que la série $\sum b_n$ diverge, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que $g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 1^-$, puis que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.



Exercice 8 (Mines)

Calculer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$.

Exercice 9 (Centrale)

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = o(p_n)$. On pose $f(x) = \sum_{n \geq 0} x^{p_n}$.

- 1) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{p_n}$.
- 2) Déterminer la limite de f en 1^- .
- 3) Etudier la limite de $(1-x)f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

