

**TD du chapitre 8 : Réduction d'endomorphisme**

Dans tout le TD,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $n$  est un entier naturel non nul.

**Éléments propres**
**Exercice 1**

Soient  $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ .

Déterminer les éléments propres de  $u : E \rightarrow E ; f \mapsto g$  où  $g : x \mapsto \frac{1}{h(x)} \int_0^x h(t) f(t) dt$ .

**Exercice 2**

Soit  $A$  un polynôme non nul fixé de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X] ; P \mapsto R$  où  $R$  est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $A$ . Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}[X]$  et déterminer ses éléments propres.

**Exercice 3**

Dans l'espace vectoriel  $E$  des suites réelles, on considère l'application  $f$  qui à toute suite  $u$  associe la suite  $v = f(u)$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$  (la moyenne de Césaro).

- 1) Justifier que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
- 2) Soit  $u$  un vecteur propre de  $f$ . Justifier l'existence de  $p = \min\{n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0\}$  et déterminer alors la valeur propre associée à  $u$ .
- 3) Prouver que pour tous  $m$  et  $p$  entiers naturels, on a  $\sum_{k=0}^m \binom{p+k}{k} = \binom{p+m+1}{m}$ .
- 4) La suite  $u$  étant toujours un élément propre de  $f$ , conjecturer  $u_{p+m}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et où  $p$  est la valeur définie à la question 2, puis prouver votre conjecture.
- 5) En déduire les éléments propres de  $f$ .

**Exercice 4**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- 1) Montrer que  $A$  est nilpotente si et seulement si sa seule valeur propre (réelle ou complexe) est 0.
- 2) Montrer que  $A$  est nilpotente si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $Tr(A^k) = 0$ .

**Exercice 5**

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $0 \leq a_{i,j} \leq 1$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ .

- 1) Montrer que 1 est valeur propre de  $A$ .
- 2) Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle ou complexe de  $A$ .
  - a. Montrer que  $|\lambda| \leq 1$ .
  - b. Prouver qu'il existe un réel  $\omega$  compris entre 0 et 1 tel que  $|\lambda - \omega| \leq 1 - \omega$ .  
Interprétez ce résultat dans le plan complexe.

## Réduction

### Exercice 6

Soit  $m$  un nombre réel et la matrice  $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 4 & 0 & m \end{pmatrix}$ .

1) Déterminer les réels  $m$  pour lesquels  $A_m$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

2) Existe-t-il un réel  $m_0$  tel que  $A_{m_0}$  soit semblable à  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  ? Si oui, calculer  $A_{m_0}^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

3) Application : Dans un clapier, il y a des Mesdames Lapin, des Messieurs Lapin et des Bébés Lapin. Au cours d'une année, chaque Madame Lapin met au monde 4 Bébés Lapins (moitié de mâles et moitié de femelles) mais cela étant stressant, elle étripe un Monsieur Lapin pour passer ses nerfs. On sait que les Bébés Lapins deviennent adultes à la fin de l'année suivante et que les lapins vivent éternellement (disons très longtemps !) sauf quand ils se font étriper.

Soit  $a_k$ ,  $b_k$  et  $c_k$  les nombres respectifs de Mesdames Lapin, Messieurs Lapin et Bébés Lapin (les deux sexes confondus) à la fin de l'année  $k$ .

a. Montrer qu'il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $X_{k+1} = AX_k$  où  $X_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$ .

b. Prouver que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $X_k = A^k X_0$ .

c. Sachant qu'initialement, il n'y avait qu'un couple adulte Monsieur et Madame Lapin, montrer que le nombre de Mesdames Lapin croît indéfiniment alors qu'il n'y jamais plus de un Monsieur Lapin en fin d'année.

### Exercice 7

On prend ici  $n \geq 2$ . Pour chaque matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ci-dessous, déterminer si elle est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et/ou dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si c'est le cas, donner ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & 4 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & a_n & \cdots & a_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Les  $a_i$  étant des réels non tous nuls pour la dernière.

### Exercice 8

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB = BA$ .

1) On suppose que  $A$  et  $B$  sont diagonalisables. Montrer qu'elles sont simultanément diagonalisables.

2) Montrer que  $A$  et  $B$  sont simultanément trigonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (trigonalisables dans une même base).

### Exercice 9

Soit une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont le polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

Montrer que  $A$  peut s'écrire sous la forme  $D + N$  où  $D$  est diagonalisable et  $N$  est nilpotente.

**Exercice 10**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle qu'il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $M^m = I_n$ .

- 1) Montrer que  $M$  est inversible et diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
- 2) On appelle ordre de  $M$  l'entier  $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid M^k = I_n\}$ .  
Montrer que, pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $M^k = I_n$  si et seulement si  $p$  divise  $k$ .
- 3) On appelle  $O_n$  l'ensemble des ordres des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  dont l'une des puissances est  $I_n$ .  
Montrer que  $O_n$  n'est pas vide et est fini.
- 4) Déterminer  $O_2$ .

**Exercice 11**

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- 1) Montrer que si  $f$  est diagonalisable, alors  $f^2$  l'est aussi. Justifier que la réciproque est fausse.
- 2) On suppose que  $f^2$  est diagonalisable.

Prouver que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\ker f = \ker f^2$ .

☺ On pourra utiliser les polynômes annulateurs.

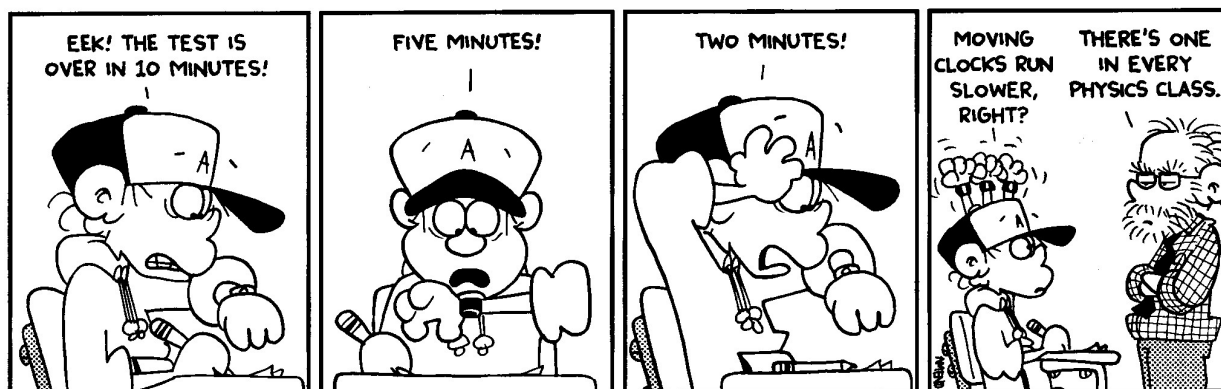
**Exercice 12**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle  $\mathcal{A}$  l'ensemble des polynômes annulateurs de  $u$ , soit  $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ .

On veut prouver qu'il existe un unique polynôme unitaire  $L$  tel que  $\mathcal{A} = L\mathbb{K}[X] = \{LP \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ .

- 1) On pose  $\mathcal{D} = \{\deg P \mid P \in \mathcal{A}, P \neq 0\}$ . Justifier que  $\mathcal{D}$  admet un minimum  $p \geq 1$ .
- 2) Soit  $L \in \mathcal{A}$ , unitaire et tel que  $\deg L = p$ . Prouver que  $\mathcal{A} = L\mathbb{K}[X]$ .
- 3) Montrer que  $L$  est unique.

Le polynôme  $L$  s'appelle *polynôme minimal* de  $u$ .

**Exercice 13 (Mines)**

Sur  $\mathbb{R}^2$  on pose  $B(u, v) = xx' - yy'$  avec  $u = (x, y)$  et  $v = (x', y')$ .

- 1) Montrer que  $G = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), \forall (u, v) \in (\mathbb{R}^2)^2, B(f(u), f(v)) = B(u, v)\}$  est stable pour la loi  $\circ$ .
- 2) Montrer que  $G \subset GL(\mathbb{R}^2)$ .

3) Soient  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  et  $M$  la matrice canoniquement associée à  $f$ . Montrer que :

$$f \in G \Leftrightarrow \exists MAM = A \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Soit  $f \in G$ .

Que peut valoir le déterminant de  $M$  ?

Quelles sont les valeurs propres possibles de  $M$  ? Est-elle diagonalisable ?

Que se passe-t-il si  $\det M = -1$  ?

### Exercice 14 (Centrale)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On pose  $f(M) = AM$  pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

- 1) L'application  $f$  est-elle un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ?
- 2) Etudier l'équivalence entre les inversibilités de  $A$  et de  $f$ .
- 3) Etudier l'équivalence entre les diagonalisabilités de  $A$  et de  $f$ .

