

TD du chapitre 9 : Dérivation et courbes paramétrées
Exercice 1

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(a) < f'(b)$.

Prouver le théorème de Darboux : f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que :

$$\forall k \in [f'(a), f'(b)], \exists c \in [a, b] \setminus f'(c) = k.$$

☺ On pourra commencer par le cas où $k = 0$ et montrer qu'alors f admet un minimum sur $[a, b]$.

Exercice 2

Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que f' est bornée sur $]0, 1[$. On veut prouver que f admet une limite à droite en 0.

On pose $M = \sup_{x \in]0, 1[} |f'(x)|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{2^n}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq M |x_{n+1} - x_n|$, puis que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$|f(x_{n+p}) - f(x_p)| \leq \frac{M}{2^p}.$$

2) Justifier alors que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sup_{k \geq n} f(x_k)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L .

4) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - f(x_n)| \leq \frac{M}{2^n}$ puis que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

5) Démontrer alors que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$. ☺ On pourra utiliser la technique de la question 1.

Exercice 3

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , E un espace euclidien et $f : I \rightarrow E$

1) On suppose que f est deux fois dérivable et que $\|f''\|$ est constante.

Montrer que $(f \mid f'')$ est à valeurs négatives. Interprétation cinématique ?

2) On suppose que f est dérivable et qu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $\|f'(x)\| \leq k \|f(x)\|$.

Montrer que si la fonction f s'annule en un point de I , alors elle est nulle sur I .

☺ On pourra utiliser la fonction $g : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{-2kx}$.

Exercice 4

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$, continue en 0 et telle qu'il existe

$k \in]0, 1[$ et $\ell \in E$ tels que $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} [f(t) - f(kt)] \right) = \ell$.

1) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}, \forall i \in \mathbb{N}, \left\| \frac{1}{k^i t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - \ell \right\| \leq \varepsilon$.

2) En déduire que f est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$ en fonction de k et ℓ .

Exercice 5

Etudier et représenter les courbes paramétrées suivantes. Calculer sa longueur totale s'il y a lieu.

$$\text{a. } \begin{cases} x(t) = 3 \cos t - \cos 3t \\ y(t) = 3 \sin t - \sin 3t \end{cases} \quad (\text{Néphroïde}) \quad \text{b. } \begin{cases} x(t) = t^3 - 2t + \frac{1}{t} \\ y(t) = t^2 - t + \frac{1}{t} \end{cases} \quad \text{c. } \begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$$

Exercice 6

- 1) On considère la courbe Γ paramétrée par $M(t) : \begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = 2t^3 - 3t^2 \end{cases}$ dans un repère orthonormé du plan.

Trouver le lieu C des points N du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à Γ perpendiculaires en N (C est appelée courbe orthoptique à Γ). Tracer Γ et C sur la même figure.

- 2) Soient \mathcal{C} un cercle de centre O et de rayon $a > 0$ et A un point de ce cercle. Déterminer, puis étudier le lieu de l'orthocentre H du triangle OAM lorsque M décrit \mathcal{C} . La courbe obtenue est appelée une strophoïde droite.

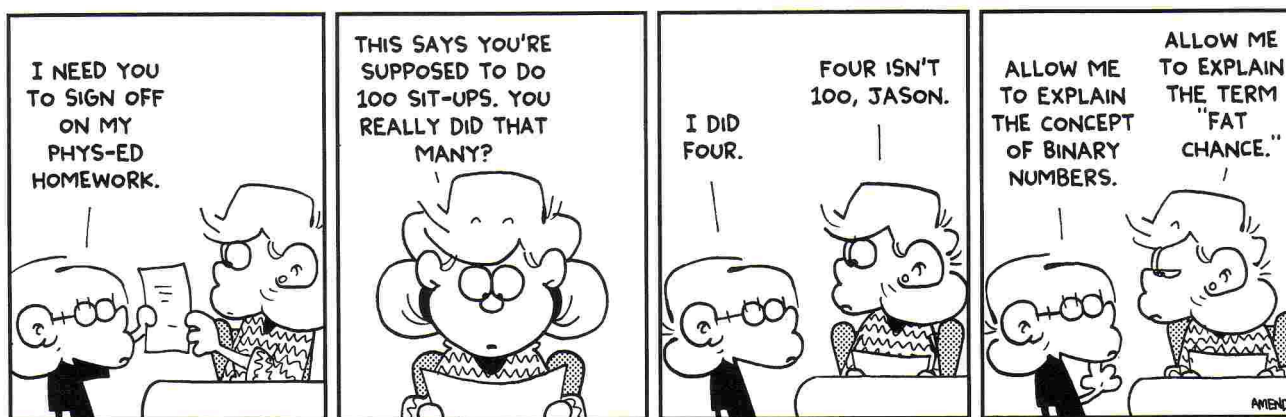
Exercice 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit \mathcal{C} une courbe régulière de classe C^1 . Pour tout point M de \mathcal{C} , on appelle T le point d'intersection de l'axe des abscisses (Ox) et de la tangente à \mathcal{C} en M , et H le projeté orthogonal de M sur (Ox). Trouver les courbes \mathcal{C} telles que $HT = a$ où $a > 0$ est fixé.

Exercice 8

Soit \mathcal{P} la parabole du plan d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé.

On considère un point P de \mathcal{P} , distinct de l'origine du repère. La normale à \mathcal{P} passant par P recoupe la parabole en un point Q . Déterminer P pour que l'arc de parabole soit de longueur minimale et donner cette longueur.

**Exercice 9**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$ de classe C^1 .

- 1) Montrer que $t \mapsto |f(t)|$ est croissante si et seulement si la partie réelle $\frac{f'(t)}{f(t)}$ est toujours positive.
- 2) On suppose que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} = a \in \mathbb{R}_-$. Déterminer la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 10

Soit \mathcal{E} la courbe plane paramétrée par $f : t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$ où a et b sont deux réels tels que $a > b > 1$ (le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})).

On note $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ et L la longueur de \mathcal{E} . La courbe \mathcal{E} est une *ellipse* et le réel e est son *excentricité*.

- 1) Montrer que $\pi(a+b) \leq L \leq \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$.
- 2) Prouver que $L = 2\pi a \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \left[\frac{\binom{2n}{n} e^n}{2^{2n}} \right]^2 \right)$.
- 3) Déterminer l'aire de la surface délimitée par \mathcal{E} .

