Corrigé du DM n° 2

On a $p_0 = q_0 = S_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{Si } S_n > x : \begin{cases} p_{n+1} = p_n \\ q_{n+1} = q_n + 1 \\ s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 \end{cases} \quad ; \quad \text{si } S_n \le x : \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 1 \\ q_{n+1} = q_n \\ s_{n+1} = 2p_{n+1} \end{cases}$$

Et :

$$S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}} = S_n + \frac{(-1)^{s_{n+1}}}{s_{n+1}} = \begin{cases} S_n - \dfrac{1}{2q_{n+1} - 1} & \text{quand } S_n > x \\ S_n + \dfrac{1}{2p_{n+1}} & \text{quand } S_n \le x \end{cases}$$

I.B. On note $s(n) = s_n$.

Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$ avec de plus, $\text{Card}\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = n$.

- Pour $n = 1$, on a :

$$S_n > x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_1 = p_0 = 0 \\ q_1 = q_0 + 1 = 1 \\ s_1 = 2q_1 - 1 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \{s(1)\} = \{2q_1 - 1\} = \{1\} \\ \text{Card}\{s(1)\} = 1 \end{cases}$$

$$S_n \le x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_1 = p_0 + 1 = 1 \\ q_1 = q_0 = 0 \\ s_{n+1} = 2p_1 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \{s(1)\} = \{2p_1\} = \{2\} \\ \text{Card}\{s(1)\} = 1 \end{cases}$$

  Donc la propriété est vraie au rang 1.

- On suppose la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{s(1), s(2), \dots, s(n)\} \cup \{s(n+1)\}.$$

  Par hypothèse de récurrence $\{s(1), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$ et $\text{Card}\{s(1), \dots, s(n)\} = n$.

  De plus :

$$S_n > x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_{n+1} = p_n \\ q_{n+1} = q_n + 1 \\ s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 = 2q_n + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \{2, 4, \dots, 2p_n\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \\ \{s(n+1)\} = \{2q_{n+1} - 1\} = \{2q_n + 1\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} &= \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} \cup \{2q_n + 1\} \\ &= \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1, 2q_n + 1\} \\ &= \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\} \end{aligned}$$

Et :

$$S_n \le x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 1 \\ q_{n+1} = q_n \\ s_{n+1} = 2p_{n+1} = 2p_n + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} = \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\} \\ \{s(n+1)\} = \{2p_{n+1}\} = \{2p_n + 2\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} &= \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\} \cup \{2p_n + 2\} \\ &= \{2, 4, \dots, 2p_n, 2p_n + 2\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\} \\ &= \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a bien $\{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\}$ et :

$$\mathrm{Card}\{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} = \mathrm{Card}\{s(1), \dots, s(n)\} + 1 = n + 1.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

La propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après les définitions des suites (p_n) et (q_n), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n + 1$. Donc la suite $(p_n + q_n)$ est arithmétique de raison 1. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n + q_n = n + p_0 + q_0 = n.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1} = S_n + u_{s(n+1)}$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = u_{s(n)}$.

Avec $S_0 = 0$, on obtient par télescopage, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} u_{s(k)} \quad \Leftrightarrow \quad S_n - S_0 = S_n = u_{s(1)} + \dots + u_{s(n)}.$$

Finalement, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} \\ \mathrm{Card}\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = n \\ p_n + q_n = n \\ S_n = u_{s(1)} + \dots + u_{s(n)} \end{array}}$$

Soient $n, n' \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \ne n'$. Quitte à échanger n et n', on peut prendre $n > n'$.

Alors, $s(n') \in \{s(1), s(2), \dots, s(n)\}$ et si $s(n) = s(n')$, alors $\mathrm{Card}\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} < n$, ce qui est absurde avec ce que l'on vient de prouver. Ainsi, pour tous $n, n' \in \mathbb{N}^*$, on a $s(n) \ne s(n')$, autrement dit :

$$\boxed{s \text{ est injective.}}$$

I.C.1) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entier convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

On a alors $|a_n - \ell| \le \dfrac{1}{4}$ à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$. Alors, pour tous entiers $n, n' \ge N$, on a :

$$|a_n - a_{n'}| = |a_n - \ell + \ell - a_{n'}| \le |a_n - \ell| + |a_{n'} - \ell| \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Or, si $a_n \neq a_{n'}$, on a $|a_n - a_{n'}| \geq 1$ (car a_n et $a_{n'}$ sont entiers). Ceci est absurde, donc $a_n = a_{n'}$.

Ainsi, $a_n = a_{n'}$ pour tous entiers $n, n' \geq N$, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{Toute suite d'entier convergente est constante à partir d'un certain rang.}}$$

I.C.2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{n+1} = p_n$ ou $p_n + 1$, donc $p_{n+1} \geq p_n$ et la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Si on suppose qu'elle est majorée, alors elle converge. Or, c'est une suite d'entiers, donc d'après ce qui précède, elle est constante à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a $p_{n+1} = p_n$, donc $S_n > x$, $q_{n+1} = q_n + 1$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ et $S_{n+1} = S_n - \dfrac{1}{2q_{n+1} - 1}$.

Alors, pour tout $k \geq n_0$, on a $q_{k+1} = q_{n_0} + \sum\limits_{k=n_0}^{k} 1 = q_{n_0} + k + 1 - n_0$ et pour tout $n \geq n_0 + 1$:

$$S_n - S_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1}(S_{k+1} - S_k) = -\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{2q_{k+1}-1} \quad\Leftrightarrow\quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{2q_{k+1}-1} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{2q_{n_0} + 2k + 2 - 2n_0 - 1}.$$

Ainsi, pour tout $n > n_0$:

$$\boxed{S_n > x \quad \text{et} \quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.}$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. La série harmonique est divergente, donc $H_n \to +\infty$.

Or, pour tout $n > n_0$:

$$\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1} \geq \sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 2} = \frac{1}{2}\sum_{k=q_{n_0}+1}^{q_{n_0}+n-n_0}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}\left(H_{q_{n_0}+n-n_0} - H_{q_{n_0}+1}\right).$$

Par comparaison, on obtient alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(H_{q_{n_0}+n-n_0} - H_{q_{n_0}+1}\right) = +\infty.$$

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$, ce qui contredit le fait que (S_n) est minorée par x à partir du rang n_0.

Finalement, supposer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée mène à une contradiction, donc :

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas majorée.}}$$

b) Comme la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, le résultat ci-dessus implique immédiatement que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty}$$

I.C.3) Comme la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, elle aussi, croissante, si on suppose qu'elle est majorée, on aboutit à $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $n > n_0$, $S_n \leq x$ (donc (S_n) est majorée) et :

$$S_n = S_{n_0} + \frac{1}{2}\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{p_{n_0}+k-n_0+1} = S_{n_0} + \frac{1}{2}\left(H_{p_{n_0}+n-n_0} - H_{p_{n_0}+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty .$$

Ceci est absurde donc la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et comme elle est croissante, on a immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty}$$

I.C.4) On a $\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $2p_N \geq n$ et $2q_N - 1 \geq n$.

Alors :

- soit n est pair et il appartient à $\{2, 4, \dots, 2p_N\}$;
- soit n est impair et il appartient à $\{1, 3, \dots, 2q_N - 1\}$.

Et donc :

$$n \in \{2, 4, \dots, 2p_N\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_N - 1\} = \{s(1), s(2), \dots, s(N)\}.$$

Ainsi, il existe $k \in [\![1, N]\!] \subset \mathbb{N}^*$, $s(k) = n$. Ceci prouve que :

$$s : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \text{ est surjective.}$$

Comme on a vu plus haut que s est injective :

$$\boxed{s \text{ réalise une bijection de } \mathbb{N}^* \text{ dans } \mathbb{N}^*.}$$

I.D.1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que montrer que $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x|$ ou $|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$ revient à montrer que :

$$|S_{n+1} - x| \leq M_n = \max\left(|S_n - x|, |u_{s(n+1)}|\right).$$

On a :

$$S_{n+1} - x = S_n - x + (-1)^{s(n+1)} |u_{s(n+1)}|.$$

- Si $S_n > x$, alors $|S_n - x| = S_n - x$ et $s(n+1) = s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ donc :

$$S_{n+1} - x = |S_n - x| - |u_{s(n+1)}| \quad\Rightarrow\quad -M_n \leq -|u_{s(n+1)}| \leq S_{n+1} - x \leq |S_n - x| \leq M_n \quad\Rightarrow\quad |S_{n+1} - x| \leq M_n .$$

- Si $S_n \leq x$, alors $|S_n - x| = x - S_n$ et $s(n+1) = s_{n+1} = 2p_{n+1}$ donc :

$$S_{n+1} - x = -|S_n - x| + |u_{s(n+1)}| \quad\Rightarrow\quad -M_n \leq -|S_n - x| \leq S_{n+1} - x \leq |u_{s(n+1)}| \leq M_n \quad\Rightarrow\quad |S_{n+1} - x| \leq M_n .$$

Finalement, on a bien $|S_{n+1} - x| \leq M_n = \max\left(|S_n - x|, |u_{s(n+1)}|\right)$ dans les deux cas, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \text{ ou } |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|}$$

I.D.2) On veut : $\forall\, N\in\mathbb{N},\ \exists\, n\in\mathbb{N},\ n>N,\ |S_{n+1}-x|\le|u_{s(n+1)}|$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que : $\exists\, N\in\mathbb{N},\forall\ n\in\mathbb{N},\ n>N,\ |S_{n+1}-x|>|u_{s(n+1)}|$.

D'après la question précédente, ceci implique que pour tout $n>N$, on a :

$$|u_{s(n+1)}|<|S_{n+1}-x|\le|S_n-x|.$$

La question précédente permet aussi de distinguer deux cas.

- Si $S_n>x$, alors $-|u_{s(n+1)}|\le S_{n+1}-x\le S_n-x$ avec $|u_{s(n+1)}|<|S_{n+1}-x|$.

  Ceci permet de conclure que $S_{n+1}>x$, car sinon on aurait $|S_{n+1}-x|=-(S_{n+1}-x)$, donc $|u_{s(n+1)}|<|S_{n+1}-x|$ donnerait $-|u_{s(n+1)}|>S_{n+1}-x$, qui est absurde.

  Ceci montre que dans ce cas, la suite $(S_n)_{n>N}$ est décroissante et minorée par *x*, donc convergente.

  Or, si $S_n>x$ pour tout $n>N$, on a, pour tout $n>N$, $q_{n+1}=q_n+1$, donc $q_{n+1}=q_{N+1}+n-N$, et :

$$u_{s(n+1)}=u_{2q_{n+1}-1}=u_{2n+2q_{N+1}-2N-1}=-\frac{1}{2n+Q}$$
$$S_{n+1}=S_{N+1}+\sum_{k=N+1}^{n}u_{s(k+1)}=S_{N+1}-\sum_{k=N+1}^{n}\frac{1}{2k+Q}$$

  avec $Q=2q_{N+1}-2N-1$.

  Comme on l'a vu plus haut, on a alors $S_{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty$, ce qui est absurde.

- Si $S_n\le x$, alors et $S_n-x\le S_{n+1}-x\le|u_{s(n+1)}|$ avec $|u_{s(n+1)}|<|S_{n+1}-x|$, donc $S_{n+1}-x\le 0$, soit $S_{n+1}\le x$.

  Alors, la suite $(S_n)_{n>N}$ est croissante et majorée par *x*, donc convergente, amis comme ci-dessus, on a pour tout $n>N$, $S_n\le x$ donc $p_{n+1}=p_n+1$, soit $p_{n+1}=p_{N+1}+n-N$ et :

$$u_{s(n+1)}=u_{2p_{n+1}}=u_{2n+2p_{N+1}-2N}=\frac{1}{2n+P}$$
$$S_{n+1}=S_{N+1}+\sum_{k=N+1}^{n}u_{s(k+1)}=S_{N+1}+\sum_{k=N+1}^{n}\frac{1}{2k+P}$$

  avec $P=2p_{N+1}-2N$.

  Alors $S_{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, ce qui est absurde.

Finalement, on aboutit à une absurdité dans tous les cas, et donc on a bien :

$$\boxed{\forall\, N\in\mathbb{N},\ \exists\, n\in\mathbb{N},\ n>N,\ |S_{n+1}-x|\le|u_{s(n+1)}|.}$$

I.D.3) On vu que $p_n\to+\infty$ et $q_n\to+\infty$, donc $p_n\ge1$ à partir d'un rang $n_1\in\mathbb{N}$ et $q_n\ge1$ à partir d'un rang $n_2\in\mathbb{N}$. En posant $n_0=\max(n_1,n_2)$, on a :

$$\boxed{p_n\ge1 \text{ et } q_n\ge1 \text{ pour tout entier } n\ge n_0.}$$

I.D.4) Pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$v_{n+1} = \max\left(\left|S_{n+1} - x\right|, \left|u_{2p_{n+2}}\right|, \left|u_{2q_{n+2}-1}\right|\right).$$

Et :

$$p_{n+2} \geq p_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \left|u_{2p_{n+2}}\right| = \frac{1}{2p_{n+2}} \leq \frac{1}{2p_{n+1}} = \left|u_{2p_{n+1}}\right| \leq v_n$$

$$q_{n+2} \geq q_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \left|u_{2q_{n+2}-1}\right| = \frac{1}{2q_{n+2}-1} \leq \frac{1}{2q_{n+1}-1} = \left|u_{2q_{n+1}-1}\right| \leq v_n$$

De plus, d'après la question I.D.1 :

$$\left|S_{n+1} - x\right| \leq \max\left(\left|S_n - x\right|, \left|u_{s(n+1)}\right|\right).$$

Or, comme $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ ou $2p_{n+1}$, on a $\left|u_{s(n+1)}\right| = \left|u_{2q_{n+1}-1}\right|$ ou $\left|u_{2p_{n+1}}\right|$, d'où :

$$\left|u_{s(n+1)}\right| \leq \max\left(\left|u_{2q_{n+1}-1}\right|, \left|u_{2p_{n+1}}\right|\right).$$

Donc :

$$\left|S_{n+1} - x\right| \leq \max\left(\left|S_n - x\right|, \max\left(\left|u_{2q_{n+1}-1}\right|, \left|u_{2p_{n+1}}\right|\right)\right) = \max\left(\left|S_n - x\right|, \left|u_{2q_{n+1}-1}\right|, \left|u_{2p_{n+1}}\right|\right) = v_n.$$

Finalement, $\left|S_{n+1} - x\right|$, $\left|u_{2p_{n+2}}\right|$ et $\left|u_{2q_{n+2}-1}\right|$ sont tous les trois inférieurs à v_n, donc leur maximum l'est aussi, soit :

$$v_{n+1} \leq v_n.$$

Et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n \geq n_0} \text{ est décroissante.}}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|S_n - x\right| \geq 0$, $\left|u_{2q_{n+1}-1}\right| \geq 0$ et $\left|u_{2p_{n+1}}\right| \geq 0$, donc $v_n \geq 0$.

La suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est donc décroissante et minorée par 0 : elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

De plus, on a $\left|u_{2q_{n+1}-1}\right| = \dfrac{1}{2q_{n+1}-1} \to 0$ (car $q_n \to +\infty$) et $\left|u_{2p_{n+1}}\right| = \dfrac{1}{2p_{n+1}} \to 0$ (car $p_n \to +\infty$).

Supposons alors que $v_n \to \ell > 0$, alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$:

$$\left|u_{2q_{n+1}-1}\right| < \frac{\ell}{2}, \left|u_{2p_{n+1}}\right| < \frac{\ell}{2} \text{ et } v_n > \frac{\ell}{2} \quad \Rightarrow \quad v_n = \left|S_n - x\right|.$$

Ainsi, $\left|S_n - x\right| \to \ell > 0$ et pour tout entier $n \geq N$, $v_n = \left|S_n - x\right| > \dfrac{\ell}{2}$.

Or, d'après la question I.D.2, il existe un entier $n > N$ tel que $\left|S_{n+1} - x\right| \leq \left|u_{s(n+1)}\right|$ et $\left|u_{s(n+1)}\right| = \left|u_{2q_{n+1}-1}\right|$ ou $\left|u_{2p_{n+1}}\right|$, donc $\left|S_{n+1} - x\right| \leq \left|u_{s(n+1)}\right| < \dfrac{\ell}{2}$, ce qui est absurde.

Ainsi, ℓ n'est pas strictement positif, donc $\ell = 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n \geq n_0} \text{ converge vers 0.}}$$

I.D.5) Pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n = \max\left(|S_n - x|, \left|u_{2q_{n+1}-1}\right|, \left|u_{2p_{n+1}}\right|\right)$, donc :

$$|S_n - x| \leq v_n .$$

Alors, comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} |S_n - x| = 0$, soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} u_{s(k)}\right] = x}$$

Finalement :

$$\boxed{s \text{ est une bijection de } \mathbb{N}^* \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ telle que } \sum_{n=1}^{+\infty} u_{s(n)} = x .}$$

I.E.1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} \qquad \textbf{(1)}$$

Et, pour $n \geq 2$, en posant $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \quad \Leftrightarrow \quad H_{n+1} - \frac{3}{2} \leq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n - 1$$

Soit pour tout $n \geq 3$, en posant $u_n = H_n - \ln n$:

$$1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leq H_n \leq \frac{3}{2} + \ln n - \ln 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < 1 - \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \qquad \textbf{(2)}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc minorée.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} .$$

Et d'après **(1)**, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, donc elle converge vers un réel γ et :

$$u_n = H_n - \ln n = \gamma + o(1) .$$

En passant à la limite dans **(2)**, on obtient $0 < 1 - \ln 2 \leq \gamma$ et finalement :

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \gamma > 0 \text{ tel que } H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) .}$$

I.E.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n .$$

Donc, avec le résultat précédent :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\left[\ln(2n)+\gamma+o(1)\right]-\frac{1}{2}\left[\ln n+\gamma+o(1)\right]=\ln 2+\ln n+\gamma-\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{2}\gamma+o(1).$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma+o(1)}$$

Remarquons que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}H_n=\frac{1}{2}\ln n+\frac{1}{2}\gamma+o(1).$$

I.E.3) Soit *n* un entier naturel tel que $p_n\geq 1$ et $q_n\geq 1$, donc $n\geq n_0$ avec n_0 défini dans la question I.D.3.

a) On a :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_{s(k)}=\sum_{k\in\{s(1),s(2),\dots,s(n)\}}u_k=\sum_{k\in\{2,4,\dots,2p_n\}}u_k+\sum_{k\in\{1,3,\dots,2q_n-1\}}u_k=\sum_{k=1}^{p_n}u_{2k}+\sum_{k=1}^{q_n}u_{2k-1}=\sum_{k=1}^{p_n}\frac{(-1)^{2k}}{2k}+\sum_{k=1}^{q_n}\frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1}.$$

Soit :

$$\boxed{S_n=\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{q_n}\frac{1}{2k-1}}$$

b) D'après les questions I.E.2 et I.E.3.a, et avec $p_n\to+\infty$ et $q_n\to+\infty$, on peut écrire :

$$S_n=\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{q_n}\frac{1}{2k-1}=\left[\frac{1}{2}\ln p_n+\frac{1}{2}\gamma+o(1)\right]-\left[\frac{1}{2}\ln q_n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma+o(1)\right]=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right)-\ln 2+o(1).$$

Et comme, d'après la question I.B, on toujours $p_n+q_n=n$, on obtient bien :

$$\boxed{S_n=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right)-\ln 2+o(1)}$$

c) On a vu que $S_n\to x$, soit $S_n=x+o(1)$, donc :

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right)-\ln 2+o(1)=x+o(1)\quad\Leftrightarrow\quad\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right)=2\ln 2+2x+o(1)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{p_n}{n-p_n}=e^{2\ln 2+2x+o(1)}=4e^{2x}e^{o(1)}.$$

Soit :

$$\frac{n-p_n}{p_n}=\frac{n}{p_n}-1=\frac{1}{4}e^{-2x}e^{o(1)}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{n}{p_n}\to 1+\frac{1}{4}e^{-2x}.$$

Comme $1+\frac{1}{4}e^{-2x}\neq 0$ pour tout réel *x*, on peut écrire $p_n\sim\dfrac{n}{1+\frac{1}{4}e^{-2x}}$, soit :

$$\boxed{p_n\sim\frac{4}{4+e^{-2x}}n}$$

Avec $q_n = n - p_n$, on a $\dfrac{q_n}{n} = 1 - \dfrac{p_n}{n} \to 1 - \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-2x}} = \dfrac{e^{-2x}}{4+e^{-2x}} \neq 0$, donc :

$$\boxed{q_n \sim \frac{e^{-2x}}{4+e^{-2x}}\, n}$$

d) On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \left|u_{s(k)}\right| = \sum_{k\in\{s(1),\, s(2),\, \dots,\, s(n)\}} \left|u_k\right| = \sum_{k\in\{2,\, 4,\, \dots,\, 2p_n\}} \left|u_k\right| + \sum_{k\in\{1,\, 3,\, \dots,\, 2q_n-1\}} \left|u_k\right| = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left|u_{s(k)}\right| &= \left[\frac{1}{2}\ln p_n + \frac{1}{2}\gamma + o(1)\right] + \left[\frac{1}{2}\ln q_n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma + o(1)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln p_n + \ln q_n\right) + \ln 2 + \gamma + o(1) = \ln n + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n}\frac{q_n}{n}\right) + \ln 2 + \gamma + o(1) \end{aligned}.$$

Or, $\dfrac{p_n}{n}\dfrac{q_n}{n} \to \dfrac{4}{4+e^{-2x}}\dfrac{e^{-2x}}{4+e^{-2x}} > 0$, donc $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p_n}{n}\dfrac{q_n}{n}\right) + \ln 2 + \gamma + o(1) \to \dfrac{4}{4+e^{-2x}}\dfrac{e^{-2x}}{4+e^{-2x}} + \ln 2 + \gamma \in \mathbb{R}$ et ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \left|u_{s(k)}\right| \sim \ln n.$$

Par ailleurs :

$$\sum_{k=1}^{n} \left|u_k\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \left|u_k\right| \sim \ln n.$$

Alors, $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \left|u_{s(k)}\right|}{\sum_{k=1}^{n} \left|u_k\right|} \sim 1$, soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|u_{s(1)}\right| + \left|u_{s(2)}\right| + \dots + \left|u_{s(n)}\right|}{\left|u_1\right| + \left|u_2\right| + \dots + \left|u_n\right|} = 1}$$