

Corrigé du DM n° 3
Partie I.A

Q1. Les ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (cours de 1^{ère} année).

De plus, le produit de deux matrices triangulaires supérieures (strictes) est une matrice triangulaire supérieure (stricte), donc $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont stables par produit (cours de 1^{ère} année).

Ainsi :

 $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q2. $S_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (cours de 1^{ère} année).

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a $A, B \in S_2(\mathbb{K})$, mais $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{K})$, donc $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit et ainsi :

 $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On a $C \in \mathcal{A}_2(\mathbb{K})$ (et même $\mathcal{A}_2(\mathbb{K}) = \text{Vect}(C)$), mais $C^2 = -I_2 \notin \mathcal{A}_2(\mathbb{K})$, donc $\mathcal{A}_2(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit et ainsi :

 $\mathcal{A}_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Q3. On reprend les matrices A, B et C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ définies ci-dessus et on pose :

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix} \text{ et } C' = \begin{pmatrix} C & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}.$$

On a $A', B' \in S_n(\mathbb{K})$ et $C' \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, mais $A'B' \notin S_n(\mathbb{K})$ et $C'^2 \notin \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, donc $S_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas stables par produit et :

 $S_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie I.B

Q4. On a $\mathcal{S}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$. Soient $u, v \in \mathcal{S}_F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a $u(F) \subset F$ et $v(F) \subset F$. Alors :

- pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$ et $v(x) \in F$ donc $(\lambda u + \mu v)(x) = \lambda u(x) + \mu v(x) \in F$, soit $(\lambda u + \mu v)(F) \subset F$;
comme $\lambda u + \mu v \in \mathcal{L}(E)$, on a $\lambda u + \mu v \in \mathcal{S}_F$ donc \mathcal{S}_F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$;
- $u(F) \subset F$ donc $v \circ u(F) \subset v(F) \subset F$ et comme $v \circ u \in \mathcal{L}(E)$, on a $v \circ u \in \mathcal{S}_F$ donc \mathcal{S}_F est stable par produit (composition ici).

Finalelement :

$$\mathcal{A}_F \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(E).$$

Q5. Soit $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , que l'on complète en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour tout $u \in \mathcal{A}_F$, posons $M_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(e_j) = a_{1,j}e_1 + \dots + a_{p,j}e_p + a_{p+1,j}e_{p+1} + \dots + a_{n,j}e_n$.

Comme F est stable par u , si $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, alors $e_j \in F$, donc $u(e_j) = a_{1,j}e_1 + \dots + a_{p,j}e_p$ et $a_{p+1,j} = \dots = a_{n,j} = 0$.

Ainsi, il existe $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $A_3 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$:

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_3 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $M_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme ci-dessus, alors pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u(e_j) = a_{1,j}e_1 + \dots + a_{p,j}e_p \in F$, donc F est stable par u et $u \in \mathcal{A}_F$.

On a alors $\dim \mathcal{A}_F = \dim \mathcal{F}$ avec :

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), A_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), A_3 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\}.$$

Or, \mathcal{F} est isomorphe à $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ (via $(A_1, A_2, A_3) \mapsto \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_3 \end{pmatrix}$), donc :

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{A}_F &= \dim(\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})) \\ &= \dim \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \\ &= p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 \end{aligned}$$

Soit :

$$\dim \mathcal{A}_F = n^2 - np + p^2$$

Q6. Posons $f(x) = n^2 - nx + x^2$ sur $[1, n-1]$.

La fonction f est polynomiale, donc dérivable sur $[1, n-1]$ avec $f'(x) = 2x - n = 2\left(x - \frac{n}{2}\right)$.

Avec $\frac{n}{2} \in [1, n-1]$ (pour $n \geq 2$), on a :

- sur $\left[1, \frac{n}{2}\right]$, $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante de $f(1) = n^2 - n + 1$ à $f\left(\frac{n}{2}\right)$;
- sur $\left[\frac{n}{2}, n-1\right]$, $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante de $f\left(\frac{n}{2}\right)$ à $f(n-1) = n^2 - n + 1$.

Finalelement, le maximum de f sur $[1, n-1]$ est $f(1) = f(n-1) = n^2 - n + 1$, donc :

$$\max_{1 \leq p \leq n-1} (n^2 - np + p^2) = n^2 - n + 1$$

Partie I.C

Q7. En posant comme plus haut $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\Gamma(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{K}^2 \right\} = \{ aI_2 + bC \mid (a, b) \in \mathbb{K}^2 \} = \text{Vect}(I_2, C).$$

Donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Pour tout $(a, b, a', b') \in \mathbb{K}^4$, on a avec $C^2 = -I_2$:

$$\begin{aligned} (aI_2 + bC)(a'I_2 + b'C) &= aa'I_2 + ba'C + ab'C + bb'C^2 \\ &= aa'I_2 + ba'C + ab'C - bb'I_2 \\ &= (aa' - bb')I_2 + (ba' + ab')C \end{aligned}$$

Donc, $(aI_2 + bC)(a'I_2 + b'C) \in \Gamma(\mathbb{K})$ et $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit.

Finalement :

$$\Gamma(\mathbb{K}) \text{ est une sous-alg\`ebre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).$$

Q8. Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $\Gamma(\mathbb{R})$ est une sous-alg\`ebre diagonalisable, alors il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M de $\Gamma(\mathbb{R})$, $P^{-1}MP$ est diagonale. En particulier, $P^{-1}CP$ est diagonale, soit $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec λ et

μ r\`eels. Si $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} P^{-1}CP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} &\Leftrightarrow CP = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\gamma & -\delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \mu\beta \\ \lambda\gamma & \mu\delta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma = \lambda\alpha \\ -\delta = \mu\beta \\ \alpha = \lambda\gamma \\ \beta = \mu\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda^2 + 1)\gamma = 0 \\ (\mu^2 + 1)\delta = 0 \\ \alpha = \lambda\gamma \\ \beta = \mu\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Soit finalement $P = 0_2$, ce qui est absurde car P est inversible.

Ainsi, il n'existe pas de matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que pour toute M de $\Gamma(\mathbb{R})$, $P^{-1}MP$ est diagonale, donc :

$$\Gamma(\mathbb{R}) \text{ n'est pas une sous-alg\`ebre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Q9. Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On reprend les calculs ci-dessus mais dans \mathbb{C} , en remarquant que $\lambda \neq \mu$ (car sinon on aurait $P^{-1}CP = \lambda I_2$, donc $C = \lambda I_2$ qui est absurde). On obtient alors :

$$\begin{cases} (\lambda^2 + 1)\gamma = 0 \\ (\mu^2 + 1)\delta = 0 \\ \alpha = \lambda\gamma \\ \beta = \mu\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = i \\ \mu = -i \\ \alpha = i\gamma \\ \beta = -i\delta \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = -i \\ \mu = i \\ \alpha = -i\gamma \\ \beta = i\delta \end{cases}$$

En choisissant $\lambda = i$, on obtient $P = \begin{pmatrix} \alpha & i\delta \\ i\alpha & \delta \end{pmatrix}$ (qui est inversible pour $\alpha \neq 0$ et $\delta \neq 0$ car $\det P = 2\alpha\delta$).

Avec cette matrice P , on a $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$:

$$P^{-1}(aI_2 + bC)P = aP^{-1}P + bP^{-1}CP = aI_2 + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}.$$

Donc, pour toute $M \in \Gamma(\mathbb{R})$, $P^{-1}MP$ est diagonale et ainsi :

$\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Partie III.A

Q23. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a $\langle A | B \rangle = \text{Tr}({}^t AB)$ avec $\text{Tr}((a_{i,j})) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

- Une matrice et sa transposée ayant les mêmes éléments diagonaux, on a $\text{Tr}({}^t M) = \text{Tr}(M)$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc :

$$\langle B | A \rangle = \text{Tr}({}^t BA) = \text{Tr}({}^t ({}^t BA)) = \text{Tr}({}^t A {}^t ({}^t B)) = \text{Tr}({}^t AB) = \langle A | B \rangle.$$

Et $(A, B) \mapsto \langle A | B \rangle$ est symétrique.

- L'application $M \mapsto \text{Tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \mapsto \langle A | B \rangle = \text{Tr}({}^t AB)$ est linéaire, donc $(A, B) \mapsto \langle A | B \rangle$ est linéaire à droite, donc bilinéaire avec la symétrie.

- Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si ${}^t AA = (\alpha_{i,j})$, on a $\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}$ donc :

$$\langle A | A \rangle = \text{Tr}({}^t AA) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geq 0.$$

Donc $(A, B) \mapsto \langle A | B \rangle$ est positive.

- Enfin, pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\langle A | A \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (k, i) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{k,i} = 0 \Leftrightarrow A = 0_n.$$

Donc $(A, B) \mapsto \langle A | B \rangle$ est définie.

Finalement :

$(A, B) \mapsto \langle A | B \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q24. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on a $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui donne immédiatement :

$$\dim \mathcal{A} + \dim \mathcal{A}^\perp = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Soit :

$$d + r = n^2$$

Q25. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(\Rightarrow) Si $M \in \mathcal{A}$, alors pour tout $N \in \mathcal{A}^\perp$, $\langle M | N \rangle = 0$.

En particulier, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $A_i \in \mathcal{A}^\perp$, donc $\langle M | A_i \rangle = 0$.

(\Leftarrow) On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\langle M | A_i \rangle = 0$.

Pour tout $N \in \mathcal{A}^\perp$, on a $N = \sum_{i=1}^r a_i A_i$ (les a_i sont des réels) et :

$$\langle M | N \rangle = \left\langle M \mid \sum_{i=1}^r a_i A_i \right\rangle = \sum_{i=1}^r a_i \langle M | A_i \rangle = 0.$$

Donc, $M \in (\mathcal{A}^\perp)^\perp$ et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $(\mathcal{A}^\perp)^\perp = \mathcal{A}$, donc $M \in \mathcal{A}$.

Finalelement :

$$M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \langle M | A_i \rangle = 0.$$

Q26. Soit $N \in \mathcal{A}$.

On veut montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, ${}^t N A_i \in \mathcal{A}^\perp$, c'est-à-dire que pour tout $M \in \mathcal{A}$, $\langle M | {}^t N A_i \rangle = 0$.

Soient $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $M \in \mathcal{A}$. On a :

$$\langle M | {}^t N A_i \rangle = \text{Tr}({}^t M {}^t N A_i) = \text{Tr}({}^t (NM) A_i) = \langle NM | A_i \rangle.$$

Or, $M, N \in \mathcal{A}$ et \mathcal{A} est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc stable par produit. Ainsi, $NM \in \mathcal{A}$ et comme $A_i \in \mathcal{A}^\perp$:

$$\langle M | {}^t N A_i \rangle = \langle NM | A_i \rangle = 0.$$

Finalelement :

$$\text{Pour tout } N \in \mathcal{A} \text{ et tout } i \in \llbracket 1, r \rrbracket, {}^t N A_i \in \mathcal{A}^\perp.$$

Partie III.B

Q27. On a $\mathcal{A}^\top = \{ {}^t M \mid M \in \mathcal{A} \}$, donc une matrice $M \in \mathcal{A}^\top$ si et seulement si ${}^t M \in \mathcal{A}$.

Soient $M, N \in \mathcal{A}^\top$. On a donc ${}^t M, {}^t N \in \mathcal{A}$ et :

- pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ${}^t(\lambda M + \mu N) = \lambda {}^t M + \mu {}^t N \in \mathcal{A}$ (car \mathcal{A} est un sous espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), et ainsi $\lambda M + \mu N \in \mathcal{A}^\top$: \mathcal{A}^\top est un sous espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- ${}^t(MN) = {}^t N {}^t M \in \mathcal{A}$ (car \mathcal{A} est stable par produit), et ainsi $MN \in \mathcal{A}^\top$: \mathcal{A}^\top est stable par produit.

Finalelement, \mathcal{A}^\top est un sous espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit, donc :

$$\mathcal{A}^\top \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Soit (B_1, \dots, B_d) une base de \mathcal{A} .

Pour tout $M \in \mathcal{A}^\top$, on a ${}^tM \in \mathcal{A}$, donc ${}^tM = b_1 B_1 + \dots + b_d B_d$ (les b_i étant des réels). Alors :

$$M = {}^t(b_1 B_1 + \dots + b_d B_d) = b_1 {}^t B_1 + \dots + b_d {}^t B_d.$$

Ainsi, $({}^t B_1, \dots, {}^t B_d)$ est une famille génératrice de \mathcal{A}^\top .

De plus, si $b_1 {}^t B_1 + \dots + b_d {}^t B_d = 0_n$, alors ${}^t(b_1 {}^t B_1 + \dots + b_d {}^t B_d) = b_1 B_1 + \dots + b_d B_d = 0_n$ et donc $b_1 = \dots = b_d = 0$ car (B_1, \dots, B_d) est libre. Donc, $({}^t B_1, \dots, {}^t B_d)$ est libre aussi.

Finalement, $({}^t B_1, \dots, {}^t B_d)$ est une famille libre et génératrice de \mathcal{A}^\top , c'est une base de \mathcal{A}^\top . Comme elle contient d matrices :

$$\dim \mathcal{A}^\top = d = \dim \mathcal{A}$$

Q28. Soit $M \in \mathcal{A}^\top$. On veut montrer que F est stable par $Z \mapsto MZ$, autrement dit que pour tout $Z \in F$, ou encore que pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $MA_k X \in F$.

Comme $M \in \mathcal{A}^\top$, on a ${}^tM \in \mathcal{A}$, donc, d'après la question 26, ${}^t({}^tM)A_k = MA_k \in \mathcal{A}^\perp$.

Il existe alors des réels a_1, \dots, a_r tels que $MA_k = \sum_{i=1}^n a_i A_i$, donc :

$$MA_k X = \sum_{i=1}^n a_i A_i X \in F.$$

Ainsi :

$$\text{Pour tout } M \in \mathcal{A}^\top, F \text{ est stable par } Z \mapsto MZ.$$

Q28. On vient de voir que pour tout $M \in \mathcal{A}^\top$, si on note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et v_M l'endomorphisme de E canoniquement associé à M , on a $v_M(F) \subset F$, donc $v_M \in \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$. Alors :

$$\{v_M \mid M \in \mathcal{A}^\top\} \subset \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}.$$

Or, $\{v_M \mid M \in \mathcal{A}^\top\}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à \mathcal{A}^\top (via l'isomorphisme canonique $M \mapsto v_M$), donc :

$$\dim \{v_M \mid M \in \mathcal{A}^\top\} = \dim \mathcal{A}^\top \leq \dim \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}.$$

De plus, d'après la question 5, $\dim \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\} = n^2 - n \dim F + (\dim F)^2$ et d'après la question 27, $\dim \mathcal{A}^\top = \dim \mathcal{A} = d$, donc :

$$d \leq n^2 - n \dim F + (\dim F)^2.$$

Enfin, comme $F = \text{Vect}(A_1 X, \dots, A_r X)$, on a $\dim F \leq r = n^2 - d$.

On a vu à la question 6 que si $\dim F \in [1, n-1]$, alors $n^2 - n \dim F + (\dim F)^2 \leq n^2 - n + 1$, donc $d \leq n^2 - n + 1$.

Et si $\dim F > n-1$, alors $n-1 < \dim F \leq r = n^2 - d$, donc $d < n^2 - n + 1$.

Dans les deux cas, on obtient :

$$d \leq n^2 - n + 1$$

D'après la partie I.B, si F est une droite vectorielle de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - n + 1$.

Ainsi, on peut trouver une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$, et donc de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n^2 - n + 1$ et finalement :

La dimension maximale d'une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $n^2 - n + 1$.
