Corrigé du DS n° 2

Exercice n° 1

I.

I.1) On suppose que $\sum |a_n|$ converge. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.

Il existe alors un réel $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n|\le M$, donc $|a_n u_n|\le M|a_n|$. Comme la série $\sum |a_n|$ converge, la série positive $\sum |a_n u_n|$ converge par comparaison et ainsi, $\sum a_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Finalement, pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum u_n a_n$ converge, donc :

$$\boxed{\text{Si la série } \sum a_n \text{ converge absolument, la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie } (P_1).}$$

I.2) On suppose que la série $\sum |a_n|$ diverge. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n=\begin{cases}\dfrac{\overline{a}_n}{|a_n|} & \text{si } a_n\ne 0\\ 1 & \text{si } a_n=0\end{cases}$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n|=1$ (donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée) et :

$$u_n a_n=\begin{cases}\dfrac{\overline{a}_n}{|a_n|}a_n=|a_n| & \text{si } a_n\ne 0\\ a_n=0=|a_n| & \text{si } a_n=0\end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n a_n=|a_n|$ donc $\sum u_n a_n$ diverge.

Finalement :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ci-dessus est une suite de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum u_n a_n$ diverge.

I.3) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

D'après la question précédente, si la série $\sum |a_n|$ diverge, alors il existe une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et telle que $\sum u_n a_n$ diverge, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne vérifie pas (P_1).

Ainsi, par contraposée, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_1), alors la série $\sum |a_n|$ converge.

De plus, d'après la première question, si $\sum |a_n|$ converge, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_1).

Finalement :

$$\boxed{\text{Les suites complexes } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ qui vérifient } (P_1) \text{ sont les suites telles que la série } \sum a_n \text{ converge absolument.}}$$

II.

II.1) La série $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge. Alors, $\sum (a_{n+1}-a_n)$ est absolument convergente, donc convergente. Or, si $\sum (a_{n+1}-a_n)$ converge :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ possède une limite finie.}}$$

II.2) Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Sachant que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n-U_{n-1}=u_n$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}(a_n-a_{n+1})U_n+a_NU_N &= \sum_{n=0}^{N-1}a_nU_n-\sum_{n=0}^{N-1}a_{n+1}U_n+a_NU_N=\sum_{n=0}^{N}a_nU_n-\sum_{n=0}^{N-1}a_{n+1}U_n\\ &= a_0U_0+\sum_{n=1}^{N}a_nU_n-\sum_{n=0}^{N-1}a_{n+1}U_n=a_0U_0+\sum_{n=1}^{N}a_nU_n-\sum_{n=1}^{N}a_nU_{n-1}\\ &= a_0u_0+\sum_{n=1}^{N}a_n(U_n-U_{n-1})=a_0u_0+\sum_{n=1}^{N}a_nu_n\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1}(a_n-a_{n+1})U_n+a_NU_N=\sum_{n=0}^{N}a_nu_n}$$

II.3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que la série $\sum u_n$ converge. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors et elle est donc bornée. Ainsi, il existe un réel $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|U_n|\le M$, donc $|(a_n-a_{n+1})U_n|\le M|a_n-a_{n+1}|$. Comme la série $\sum|a_{n+1}-a_n|$ converge, la série positive $\sum|(a_n-a_{n+1})U_n|$ converge par comparaison. Ainsi, la série $\sum(a_n-a_{n+1})U_n$ est absolument convergente, donc convergente et la suite $\left(\sum_{n=0}^{N-1}(a_n-a_{n+1})U_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Par ailleurs, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (on vient de le voir) et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (d'après la question **II.1**), donc la suite $(a_nU_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Finalement, la suite $\left(\sum_{n=0}^{N}a_nu_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est somme de deux suites convergente, donc est convergente et donc la série $\sum u_na_n$ converge.

Nous venons donc d'établir que pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, la convergence de la série $\sum u_n$ implique celle de la série $\sum u_n a_n$, et donc que :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie la propriété } (P_2).}$$

III.

III.1) Remarquons que $\varepsilon_0 = 1 > 0$ et si, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n > 0$, on a $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n$ ou ε_n et dans les deux cas, $\varepsilon_{n+1} > 0$. Ceci prouve par récurrence que $\varepsilon_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} - A_n = \varepsilon_n a_n \geq 0$ et a suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On veut : $\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N}, n \geq N,\ p_{n+1} = 1 + p_n$.

Par l'absurde, supposons le contraire, soit : $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq N,\ p_{n+1} \neq 1 + p_n$.

Comme $p_{n+1} = 1 + p_n$ (si $A_n \geq p_n$) ou $p_{n+1} = p_n$ (si $A_n < p_n$), la propriété ci-dessus, se reformule en :

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq N,\ p_{n+1} = p_n \text{ (et } A_n < p_n).$$

Avec de plus, $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n$ pour tout $n \geq N$.

Ainsi, les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes à partir du rang *N* et la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par p_N à partir du rang *N*). Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle converge vers un réel *A*.

Alors, $\sum (A_{n+1} - A_n)$ converge, donc $\sum \varepsilon_n a_n$ converge et comme $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang *N*, ceci implique que la série $\sum a_n$ converge, ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\text{Pour tout } N \in \mathbb{N}, \text{ il existe un entier } n \geq N \text{ tel que } p_{n+1} = 1 + p_n.}$$

D'après ce qui précède, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, n > N \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$ n'est pas vide. Comme c'est une partie de $\mathbb{N}$, cet ensemble admet un minimum.

Ainsi, en posant $n_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ $n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N}, n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$:

$$\boxed{\text{La suite d'entiers } (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est parfaitement définie par récurrence.}}$$

De plus, par définition d'un minimum, on a $n_{k+1} \in \{n \in \mathbb{N}, n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $n_{k+1} > n_k$, ce qui permet d'affirmer que :

$$\boxed{\text{La suite } (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

III.2) D'après ce qui précède, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n_k < n < n_{k+1}$ (s'il y en a), on a $p_n \neq 1 + p_{n-1}$, donc $p_n = p_{n-1}$. Ainsi, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante entre les rangs n_k et $n_{k+1} - 1$. Ceci entraine que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle aussi constante entre les rangs n_k et $n_{k+1} - 1$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{n_{k+1}} = 1 + p_{n_{k+1}-1} = 1 + p_{n_k} \\ \varepsilon_{n_{k+1}} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{n_{k+1}-1} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{n_k} \end{cases}$$

Ainsi, les suites $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement arithmétique de raison 1 et géométrique de raison ½ . Avec $n_0 = 0$, on a $p_{n_0} = p_0 = 0$ et $\varepsilon_{n_0} = \varepsilon_0 = 1$, et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{p_{n_k} = k \quad \text{et} \quad \varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}}$$

III.3) On a vu plus haut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n > 0$ et comme $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n$ ou ε_n, on a $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$. Ainsi, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}$ donc $\varepsilon_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et comme $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante, la suite $(\varepsilon_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $\varepsilon_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$ et finalement :

$$\boxed{\text{La suite } (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0.}}$$

Par définition, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n a_n = A_{n+1} - A_n$, donc :

$$\sum a_n\varepsilon_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum\left(A_{n+1} - A_n\right) \text{ converge} \Leftrightarrow (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Or ici, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et on a vu que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} - A_n = \varepsilon_n a_n \geq 0$, et la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle converge donc si et seulement si elle est majorée.

Supposons que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée, donc qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $A_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{n+1} = p_n$ ou $1 + p_n$, donc $p_{n+1} \geq p_n$ et la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et, comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_{n_k} = k$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty.$$

Il existe alors un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $p_n > M$ et donc, $A_n \leq M < p_n$.

Par définition de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ceci implique que pour tout $n \geq N$, $p_{n+1} = p_n$ est donc que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, ce qui est incompatible avec sa limite infinie.

Ainsi, supposer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc que $\sum a_n\varepsilon_n$ converge, mène à une absurdité, donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et :

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n\varepsilon_n \text{ diverge.}}$$

IV.

IV.1) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\varepsilon'_n = \begin{cases} \dfrac{|a_n|}{a_n}\varepsilon_n & \text{si } a_n \neq 0 \\ \varepsilon_n & \text{si } a_n = 0 \end{cases}$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|\varepsilon'_n| = |\varepsilon_n|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to+\infty} |\varepsilon_n| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$ et par hypothèse, la série $\sum \varepsilon'_n a_n$ converge.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\varepsilon'_n a_n = \begin{cases} |a_n|\varepsilon_n & \text{si } a_n \neq 0 \\ a_n\varepsilon_n = 0 = |a_n|\varepsilon_n & \text{si } a_n = 0 \end{cases}$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon'_n a_n = \varepsilon_n|a_n|$ et ainsi, $\sum \varepsilon_n|a_n|$ converge.

On vient donc d'établir que :

$$\boxed{\text{Pour toute suite réelle } (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de limite nulle, la série } \sum \varepsilon_n|a_n| \text{ converge.}}$$

IV.2) La suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, donc d'après la question **III**, si $\sum |a_n|$ diverge, alors il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et telle que la série $\sum \varepsilon_n|a_n|$ diverge. Or, on vient juste d'établir que pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n|a_n|$ converge. Ceci permet de conclure que la série $\sum |a_n|$ ne peut pas diverger, donc que :

$$\boxed{\text{La série } \sum |a_n| \text{ converge.}}$$

V.

V.1) Supposons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $a_N \geq n^2$. Posons alors $N_0 = \min\{k\in\mathbb{N},\ a_k \geq 0\}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$N_{n+1} = \min\left\{k\in\mathbb{N},\ k > N_n \text{ et } a_k \geq (n+1)^2\right\}.$$

Comme dans la question **III**, on a construit une suite d'entiers $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{N_n} \geq n^2$.

Posons alors $u_0=0$, $u_k=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, $k\notin\{N_n,\ n\in\mathbb{N}\}$, $u_0=0$ et $u_{N_n}=\dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Comme $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante, pour tout $N\in\mathbb{N}$ tel que $N\geq N_0$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $N_n\leq N<N_{n+1}$ et :

$$0\leq\sum_{k=0}^{N}u_k=\sum_{k=0}^{N_n}u_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive et la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{N}u_k\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc la série $\sum u_k$ converge.

Or, avec les notations ci-dessus, on a pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{N}u_ka_k=\sum_{k=0}^{N_n}u_ka_k=\sum_{p=0}^{n}u_{N_p}a_{N_p}=\sum_{p=0}^{n}u_{N_p}a_{N_p}=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p^2}a_{N_p}\geq\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p^2}p^2=n+1.$$

Enfin, quand $N\to+\infty$, on a $N_n\to+\infty$ et donc $n\to+\infty$. L'inégalité $\sum_{k=0}^{N}u_ka_k\geq n+1$ prouve alors que la série $\sum a_nu_n$ diverge, ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi, supposer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée mène à une contradiction, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$

V.2) Posons $u_0=\varepsilon_0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}$.

Comme la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers 0), la série $\sum u_n$ converge et, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$U_N=\sum_{n=0}^{N}u_n=\varepsilon_0+\sum_{n=1}^{N}(\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1})=\varepsilon_N.$$

Reprenons alors la relation établie dans la question **II.2**. Ceci donne pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=0}^{N}u_na_n=\sum_{n=0}^{N-1}(a_n-a_{n+1})U_n+a_NU_N=\sum_{n=0}^{N-1}(a_n-a_{n+1})\varepsilon_n+a_N\varepsilon_N.$$

Soit :

$$\sum_{n=0}^{N-1}\varepsilon_n(a_{n+1}-a_n)=a_N\varepsilon_N-\sum_{n=0}^{N}u_na_n.$$

Or, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $\lim\limits_{N\to+\infty}a_N\varepsilon_N=0$ et, comme la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum u_na_n$ converge aussi par hypothèse. Ainsi, la suite $\left(\sum_{n=0}^{N-1}\varepsilon_n(a_{n+1}-a_n)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série } \sum\varepsilon_n\left(a_{n+1}-a_n\right) \text{ converge.}}$$

V.3) On vient d'établir que pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$ converge, donc d'après la question **IV** :

$$\boxed{\text{La série } \sum |a_{n+1} - a_n| \text{ converge.}}$$

V.4) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On vient de prouver que si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n u_n$, autrement dit, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est vérifie (P_2), alors la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

Or, dans la question **II**, on a établi que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_2).

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les suites réelles } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ qui vérifient } (P_2) \text{ sont les} \\ \text{suites réelles telles que la série } \sum |a_{n+1} - a_n| \text{ converge.}\end{array}}$$

Exercice n° 2

Q1-2-3-4. Voir les corrigés des TD du chapitre 4.

Q5. Soit $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

Pour tout $t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{t^x} \leq \dfrac{1}{n^x}$, donc par croissance de l'intégrale (les fonctions en jeu étant continues), on obtient $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x}$.

Pour tout $t \in [n-1, n]$, $\dfrac{1}{n^x} \leq \dfrac{1}{t^x}$, donc par croissance de l'intégrale (les fonctions en jeu étant encoer continues), on obtient $\displaystyle\frac{1}{n^x} = \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}}$$

Q6. Soit $x\in D$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$, on a, d'après le résultat précédent :

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{dt}{t^x}\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^x}\leq\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^x}\quad\Leftrightarrow\quad 1+\int_{2}^{n+1}\frac{dt}{t^x}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}\leq 1+\int_{1}^{n}\frac{dt}{t^x}\quad\textbf{(1)}.$$

Et :

$$\int_{2}^{n+1}\frac{dt}{t^x}=\left[\frac{t^{-x+1}}{1-x}\right]_2^{n+1}=\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}}-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{2^{x-1}}-\frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)$$

$$\int_{1}^{n}\frac{dt}{t^x}=\left[\frac{t^{-x+1}}{1-x}\right]_1^{n}=\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{1}{n^{x-1}}\right)$$

Comme $x\in D=\left]1,+\infty\right[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}=\zeta(x)$ et $x-1>0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{2}^{n+1}\frac{dt}{t^x}=\frac{1}{x-1}\frac{1}{2^{x-1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{1}^{n}\frac{dt}{t^x}=\frac{1}{x-1}$$

Ainsi, en passant à la limite quand $n\to+\infty$ dans **(1)**, on obtient pour tout $x\in D$:

$$\boxed{1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\leq\zeta(x)\leq 1+\frac{1}{x-1}}$$

Q7. On a $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\right)=+\infty$, donc par théorème de comparaison, l'inégalité de gauche du résultat ci-dessus permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+}\zeta(x)=+\infty}$$

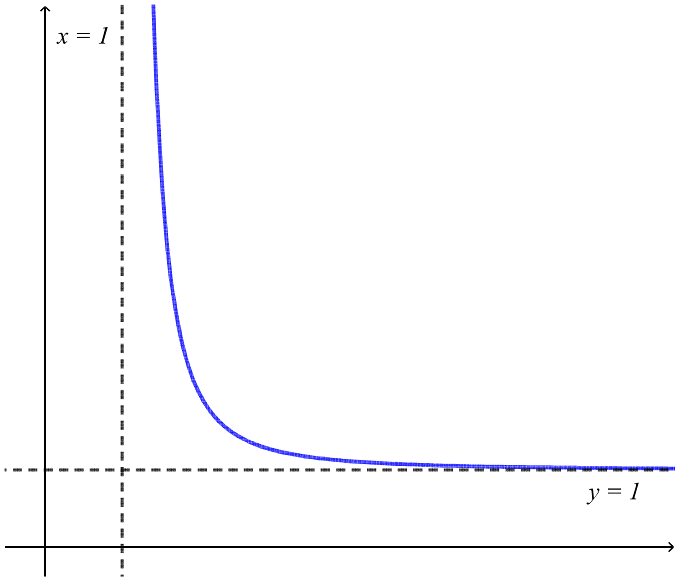
Q8. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1.$$

Donc, avec l'encadrement obtenu dans la question **Q6**, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1}$$

Q9. On obtient l'allure de la courbe représentative de ζ :



Exercice n° 3

Q1-2. Voir les corrigés des TD du chapitre 2.

Q3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_p(P^{-1}AP) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} P^{-1}A^k P = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k\right)P = P^{-1}\left(S_p(A)\right)P.$$

Par définition, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} S_p(A) = Exp(A)$$

$$\lim_{p \to +\infty} S_p(P^{-1}AP) = Exp(P^{-1}AP)$$

Or, l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (car linéaire en dimension finie), donc :

$$Exp(P^{-1}AP) = \lim_{p \to +\infty} S_p(P^{-1}AP) = \lim_{p \to +\infty} P^{-1}\left(S_p(A)\right)P = P^{-1}\left(\lim_{p \to +\infty} S_p(A)\right)P = P^{-1}\left(Exp(A)\right)P.$$

Ainsi, on a bien pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{Exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\left(Exp(A)\right)P}$$

Q4. Soit $D = diag\left(a_1, a_2, \dots, a_n\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = diag\left(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\right)$, donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_p(D) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} D^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} diag\left(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\right) = diag\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_1^k, \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_2^k, \dots, \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_n^k\right).$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_i^k = e^{a_i} .$$

Or, l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ associe la matrice $diag(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ (car linéaire en dimension finie), donc :

$$\lim_{p \to +\infty} S_p(D) = diag\left(\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_1^k ,\ \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_2^k , \dots ,\ \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_n^k \right).$$

Soit :

$$\boxed{Exp(D) = diag\left(e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_n}\right)}$$

Q5. L'application $M \mapsto {}^tM$ est linéaire continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc :

$$\boxed{\text{L'application } M \mapsto {}^tM \text{ est continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_p({}^tA) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} ({}^tA)^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} {}^t(A^k) = {}^t\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k \right) = {}^t\left(S_p(A)\right).$$

Donc :

$$Exp({}^tA) = \lim_{p \to +\infty} S_p({}^tA) = \lim_{p \to +\infty} {}^t\left(S_p(A)\right).$$

Et par continuité de $M \mapsto {}^tM$, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} {}^t\left(S_p(A)\right) = {}^t\left(\lim_{p \to +\infty} S_p(A) \right) = {}^t\left(Exp(A)\right).$$

Ainsi, on a bien pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{Exp({}^tA) = {}^t\left(Exp(A)\right)}$$

Q6. (a) Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = 0_2$, donc $N^k = 0_2$ pour tout entier $k \geq 2$.

Or, $A = aI_2 + bN$ et, comme aI_2 et bN commutent, on peut utiliser la formule du binôme, ce qui donne pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = (aI_2 + bN)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (aI_2)^{k-j} (bN)^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j N^j .$$

Si $k>0$, on a :

$$A^k=\sum_{j=0}^{1}\binom{k}{j}a^{k-j}b^jN^j=\binom{k}{0}a^kI_2+\binom{k}{1}a^{k-1}bN=a^kI_2+ka^{k-1}bN\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{A^0=I_2 \text{ et pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ A^k=\begin{pmatrix}a^k & ka^{k-1}b\\ 0 & a^k\end{pmatrix}.}$$

(b) On a $S_0(A)=I_2$ et, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$S_p(A)=\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}A^k=I_2+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}a^k & ka^{k-1}b\\ 0 & a^k\end{pmatrix}=I_2+\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{a^k}{k!} & \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{ka^{k-1}b}{k!}\\ 0 & \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{a^k}{k!}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{a^k}{k!} & b\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}\\ 0 & 1+\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{a^k}{k!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{a^k}{k!} & b\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{a^k}{k!}\\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{a^k}{k!}\end{pmatrix}$$

Soit finalement :

$$\boxed{S_0(A)=I_2 \text{ et pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ S_p(A)=\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{a^k}{k!}\right)\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}.}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}=e^a$, on obtient :

$$\boxed{Exp(A)=e^a\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}.}$$

(c) On a $B={}^tA$. Or, d'après la question **Q5**, $Exp({}^tA)={}^t\big(Exp(A)\big)$, donc $Exp(B)={}^t\big(Exp(A)\big)$, soit :

$$\boxed{Exp(B)=e^a\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}.}$$

Q7. (a) Posons $D=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$. S'il existe $P\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}CP=D$, alors :

$$\lambda+\mu=Tr(D)=Tr(P^{-1}CP)=Tr(C)=2\alpha$$
$$\lambda\mu=\det(D)=\det(P^{-1}CP)=\det C)=\alpha^2-\beta^2$$

Donc, λ et μ sont racines de $X^2-2\alpha X+\alpha^2-\beta^2$. Or :

$$X^2-2\alpha X+\alpha^2-\beta^2=(X-\alpha)^2-\beta^2=(X-\alpha-\beta)(X-\alpha+\beta).$$

On peut donc prendre :

$$\begin{cases}\lambda=\alpha-\beta\\ \mu=\alpha+\beta\end{cases}$$

Cherchons alors $P\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}CP=P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \beta&\alpha\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}\alpha-\beta&0\\ 0&\alpha+\beta\end{pmatrix}$, soit :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \beta&\alpha\end{pmatrix}P=P\begin{pmatrix}\alpha-\beta&0\\ 0&\alpha+\beta\end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha&0\\ 0&\alpha\end{pmatrix}P+\beta\begin{pmatrix}0&1\\ 1&0\end{pmatrix}P=P\begin{pmatrix}\alpha&0\\ 0&\alpha\end{pmatrix}+\beta P\begin{pmatrix}-1&0\\ 0&1\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \alpha P+\beta\begin{pmatrix}0&1\\ 1&0\end{pmatrix}P=\alpha P+\beta P\begin{pmatrix}-1&0\\ 0&1\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \beta\begin{pmatrix}0&1\\ 1&0\end{pmatrix}P=\beta P\begin{pmatrix}-1&0\\ 0&1\end{pmatrix}\end{aligned}.$$

Si $\beta=0$, le système est vérifié pour toute matrice inversible P (alors $C=\alpha I_2$ est scalaire).

Si $\beta\neq 0$, alors, en posant $P=\begin{pmatrix}x&y\\ z&t\end{pmatrix}$, la relation précédente donne :

$$\begin{pmatrix}0&1\\ 1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\ z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\ z&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\ 0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}z&t\\ x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x&y\\ -z&t\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-x\\ t=y\end{cases}.$$

Donc, $P=\begin{pmatrix}x&y\\ -x&y\end{pmatrix}$ avec $\det P=2xy\neq 0$, donc x et y non nuls.

Finalement :

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } P=\begin{pmatrix}x&y\\ -x&y\end{pmatrix} \text{ avec } x,y\in\mathbb{R}^*, \text{ on a } P^{-1}CP=\begin{pmatrix}\alpha-\beta&0\\ 0&\alpha+\beta\end{pmatrix}.}$$

(b) En posant $D=\begin{pmatrix}\alpha-\beta&0\\ 0&\alpha+\beta\end{pmatrix}$, on a $P^{-1}CP=D$, soit $C=PDP^{-1}$ et, avec **Q3** et **Q4**, on obtient :

$$Exp(C)=Exp(PDP^{-1})=P\big(Exp(D)\big)P^{-1}=P\begin{pmatrix}e^{\alpha-\beta}&0\\ 0&e^{\alpha+\beta}\end{pmatrix}P^{-1}=e^{\alpha}P\begin{pmatrix}e^{-\beta}&0\\ 0&e^{\beta}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

Et comme $P=\begin{pmatrix}x&y\\ -x&y\end{pmatrix}$, on a $P^{-1}=\dfrac{1}{2xy}\begin{pmatrix}y&-y\\ x&x\end{pmatrix}$ et :

$$\boxed{Exp(C)=e^{\alpha}\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\beta&\operatorname{sh}\beta\\ \operatorname{sh}\beta&\operatorname{ch}\beta\end{pmatrix}}$$

(c) On a $A+B=\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$, donc $Exp(A+B)=e^{2a}\begin{pmatrix} \operatorname{ch} b & \operatorname{sh} b \\ \operatorname{sh} b & \operatorname{ch} b \end{pmatrix}$ et :

$$Exp(A)Exp(B)=\left[e^a\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[e^a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\right]=e^{2a}\begin{pmatrix} 1+b^2 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$Exp(A+B)=Exp(A)Exp(B) \iff \begin{pmatrix} \operatorname{ch} b & \operatorname{sh} b \\ \operatorname{sh} b & \operatorname{ch} b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+b^2 & b \\ b & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \operatorname{ch} b = 1+b^2 = 1 \\ \operatorname{sh} b = b \end{cases}$$

La seule possibilité est $b=0$, donc :

$$\boxed{Exp(A+B)=Exp(A)Exp(B) \iff b=0}$$

Q8. (a) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!}=\operatorname{Re}\left(r^k e^{ik\theta}\right)=\operatorname{Re}\left((re^{i\theta})^k\right) \text{ et } \frac{r^k\sin(k\theta)}{k!}=\operatorname{Im}\left(r^k e^{ik\theta}\right)=\operatorname{Im}\left((re^{i\theta})^k\right).$$

Comme la série exponentielle $\sum\frac{(re^{i\theta})^k}{k!}$ converge :

$$\boxed{\text{Les séries } \sum\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!} \text{ et } \sum\frac{r^k\sin(k\theta)}{k!} \text{ convergent.}}$$

De plus :

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(re^{i\theta})^k}{k!}=\exp\left(re^{i\theta}\right)=\exp\left(r\cos\theta+i\,r\sin\theta\right)$$
$$=\exp\left(r\cos\theta\right)\exp\left(i\,r\sin\theta\right)=e^{r\cos\theta}\left[\cos\left(r\sin\theta\right)+i\sin\left(r\sin\theta\right)\right]$$

Donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{k\geq 0}\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!}&=e^{r\cos\theta}\cos\left(r\sin\theta\right) \\ \sum_{k\geq 0}\frac{r^k\sin(k\theta)}{k!}&=e^{r\cos\theta}\sin\left(r\sin\theta\right) \end{aligned}}$$

(b) On a :

$$Exp\left(rR(\theta)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(rR(\theta)\right)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}r^kR(\theta)^k.$$

Il nous fut donc calculer les puissances de $R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a :

$$R(\theta)R(\theta') = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R(\theta+\theta')$$

Prouvons alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R(\theta)^k = R(k\theta)$.

- Pour $k=0$, on a $R(\theta)^0 = I_2$ et $R(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = I_2$, donc la propriété est vraie au rang $k=0$.
- Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$, on a $R(\theta)^k = R(k\theta)$. Alors :

  $$R(\theta)^{k+1} = R(\theta)^k R(\theta) = R(k\theta)R(\theta) = R(k\theta+\theta) = R\big((k+1)\theta\big).$$

  Donc la propriété est vraie au rang $k+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Alors :

$$Exp\big(rR(\theta)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} r^k R(k\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} r^k \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} & \displaystyle -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{r\cos\theta}\cos\big(r\sin\theta\big) & -e^{r\cos\theta}\sin\big(r\sin\theta\big) \\ e^{r\cos\theta}\sin\big(r\sin\theta\big) & e^{r\cos\theta}\cos\big(r\sin\theta\big) \end{pmatrix}$$
$$= e^{r\cos\theta} \begin{pmatrix} \cos\big(r\sin\theta\big) & -\sin\big(r\sin\theta\big) \\ \sin\big(r\sin\theta\big) & \cos\big(r\sin\theta\big) \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{Exp\big(rR(\theta)\big) = e^{r\cos\theta} R\big(r\sin\theta\big)}$$

(c) Avec ce qui précède, on a va chercher *J* de la forme $J = rR(\theta)$.

Si $Exp(J) = -I_2$ avec $J = rR(\theta)$, alors on a :

$$Exp(J) = -I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = R(\pi) = e^{r\cos\theta} R\big(r\sin\theta\big).$$
$$Exp\big(rR(\theta)\big) = e^{r\cos\theta} R(r\sin\theta)$$

D'où :

$$\begin{cases} e^{r\cos\theta} = 1 \\ r\sin\theta = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r\cos\theta = 0 \\ r\sin\theta = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ r\sin\theta = \pi \end{cases}$$

On peut alors prendre $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et $r = \pi$, soit $J = \pi R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } J = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } Exp(J) = -I_2.}$$

Remarque : On pouvait procéder directement (ou, en tous cas, vérifier le résultat ci-dessus).

En posant $J = \pi A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A^2 = -I_2$, donc $A^{2k} = (-1)^k I_2$ et $A^{2k+1} = (-1)^k A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :

$$\begin{aligned} Exp(J) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \pi^k A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \pi^{2k} A^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \pi^{2k+1} A^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \pi^{2k} (-1)^k I_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \pi^{2k+1} (-1)^k A \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \pi^{2k} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \pi^{2k+1} \right) A = (\cos \pi) I_2 + (\sin \pi) A = -I_2 \end{aligned}$$

Q9. (a) On a $\mathcal{E}_n = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A\,{}^tA = {}^tAA \right\}$.

On a vu dans la question **Q5.** que l'application $M \mapsto {}^tM$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $M \mapsto M$ l'est aussi, les applications $M \mapsto {}^tMM$ et $M \mapsto M\,{}^tM$ sont, elles aussi, continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}_n$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $A_k\,{}^tA_k = {}^tA_k A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par continuité de $M \mapsto {}^tMM$ et $M \mapsto M\,{}^tM$, on peut écrire, en passant à la limite quand $k \to +\infty$: $A\,{}^tA = {}^tAA$. Ainsi, $A \in \mathcal{E}_n$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ est un fermé de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

(b) Soit $A \in \mathcal{E}_n$. On a $A\,{}^tA = {}^tAA$, donc ${}^tA$ et A commutent. Toutes puissances de A commutent alors avec toutes les puissances de ${}^tA$, autrement dit, pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$, $A^k ({}^tA)^{k'} = ({}^tA)^{k'} A^k$.

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$${}^t\big(S_p(A)\big) = {}^t\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k \right) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\, {}^t(A^k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} ({}^tA)^k .$$

Et :

$$\begin{aligned} {}^t\big(S_p(A)\big)\big(S_p(A)\big) &= \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} ({}^tA)^k \right) \left(\sum_{k'=0}^{p} \frac{1}{k'!} A^{k'} \right) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{k'=0}^{p} \frac{1}{k!} \frac{1}{k'!} ({}^tA)^k A^{k'} \\ &= \sum_{k'=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k'!} \frac{1}{k!} A^{k'} ({}^tA)^k = \left(\sum_{k'=0}^{p} \frac{1}{k'!} A^{k'} \right) \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} ({}^tA)^k \right) = \big(S_p(A)\big)\, {}^t\big(S_p(A)\big) \end{aligned}$$

Ainsi, $S_p(A) \in \mathcal{E}_n$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Or, on a $Exp(A) = \lim\limits_{p \to +\infty} S_p(A)$ et comme $\mathcal{E}_n$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient :

$$\boxed{Exp(A) \in \mathcal{E}_n \text{ lorsque } A \in \mathcal{E}_n.}$$

(c) Soient $A, B \in \mathcal{E}_n$. On a alors en posant $C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$:

$$C\,{}^tC = \frac{1}{4}(A+B)({}^tA + {}^tB) = \frac{1}{4}(A\,{}^tA + A\,{}^tB + B\,{}^tA + B\,{}^tB)$$
$${}^tCC = \frac{1}{4}({}^tA + {}^tB)(A+B) = \frac{1}{4}({}^tAA + {}^tAB + {}^tBA + {}^tBB)$$

Donc, avec $A\,{}^tA = {}^tAA$ et $B\,{}^tB = {}^tBB$, on obtient :

$$C\,{}^tC - {}^tCC = \frac{1}{4}(A\,{}^tB - {}^tAB + B\,{}^tA - {}^tBA).$$

Si on prend A symétrique et B antisymétrique (on a bien $S_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_n$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_n$), ceci donne :

$$C\,{}^tC - {}^tCC = \frac{1}{2}(BA - AB).$$

Or, rien ne dit que A et B commutent (donc que $C\,{}^tC = {}^tCC$). Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $AB \neq BA$.

Ainsi, si $A, B \in \mathcal{E}_n$, on n'a pas forcément $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \in \mathcal{E}_n$ et donc :

$$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ n'est pas convexe.}}$$

(d) On admet que pour toute matrice A de $\mathcal{E}_n$, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} = {}^tP$ et $B = P^{-1}AP = {}^tPAP$ où $B = diag(B_1, \dots, B_r)$ où les B_k sont soit de la forme (α) avec $\alpha \in \mathbb{R}$, soit de la forme $rR(\theta)$ avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

On prouve alors comme pour les matrices diagonales (question **Q4**), que :

$$Exp(B) = diag(Exp(B_1), \dots, Exp(B_r)).$$

Et :

- $Exp((\alpha)) = (e^\alpha) = (\mu) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, avec $\mu > 0$;
- $Exp(rR(\theta)) = e^{r\cos\theta} R(r \sin\theta) = \alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Ainsi, la matrice $Exp(B)$ a la forme donnée dans l'énoncé.

Or, d'après la question , $Exp(B) = Exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\left(Exp(A)\right)P$ avec $P^{-1} = {}^tP$ et donc $Exp(A)$, autrement dit toute matrice de $Exp(\mathcal{E}_n)$, est bien orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

— soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, avec $\mu > 0$;

— soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Réciproquement, si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice ayant la forme ci-dessus, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} = {}^tP$ et $D = P^{-1}CP$ où $D = diag\left(D_1, \dots, D_r\right)$ où les D_k sont soit de la forme $(\mu) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, avec $\mu > 0$, soit de la forme $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

- En posant $\alpha = \ln \mu$, on a :
$$(\mu) = \left(e^{\alpha}\right) = Exp\left((\alpha)\right).$$
- En posant $r = \sqrt{(\ln \alpha)^2 + \beta^2}$ (si $r = 0$, $\alpha R(\beta) = I_2$ et on peut se ramener au cas précédent avec deux fois la matrice (1)) et en appelant θ l'angle tel que $\cos\theta = \dfrac{\ln \alpha}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{\beta}{r}$ (si $r \neq 0$), on a $\alpha = e^{r\cos\theta}$, $\beta = r\sin\theta$ et :
$$\alpha R(\beta) = e^{r\cos\theta} R(r\sin\theta) = Exp\left(rR(\theta)\right).$$

Ainsi, $D = diag\left(Exp(B_1), \dots, Exp(B_r)\right)$ où les B_k sont soit de la forme (α) avec $\alpha \in \mathbb{R}$, soit de la forme $rR(\theta)$ avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et comme plus haut :

$$\begin{aligned} C = PDP^{-1} &= P\left[diag\left(Exp(B_1), \dots, Exp(B_r)\right)\right]P^{-1} \\ &= P\left[Exp\left(diag\left(B_1, \dots, B_r\right)\right)\right]P^{-1} \\ &= Exp\left[P\left(diag\left(B_1, \dots, B_r\right)\right)P^{-1}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, $C = Exp(A)$ où $A = P\left(diag\left(B_1, \dots, B_r\right)\right)P^{-1}$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est soit de taille 1×1, soit de taille 2×2 et du type $rR(\theta)$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, donc $A \in \mathcal{E}_n$.

Finalement :

> $Exp(\mathcal{E}_n)$ est bien l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonalement semblables à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :
>
> — soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, avec $\mu > 0$;
>
> — soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.