DS de Mathématiques n° 2

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

Exercice n° 1

(*extrait adapté de Centrale 1 - PSI - 2009*)

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum u_n a_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ implique celle de la série $\sum u_n a_n$.

L'objectif du problème est de caractériser simplement les suites qui vérifient (P_1) ou (P_2).

I. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

I.1) Montrer que si la série $\sum a_n$ converge absolument, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_1).

I.2) On suppose maintenant que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum u_n a_n$ diverge.

I.3) Caractériser alors les suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (P_1).

II. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.1) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie.

II.2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. On note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Prouver, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n a_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N .$$

II.3) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_2).

III. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge.

On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et telle que la série $\sum a_n\varepsilon_n$ diverge.

Pour cela, on définit par récurrence trois suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :

- $p_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $A_0 = a_0$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{n+1} = 1 + p_n \text{ et } \varepsilon_{n+1} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_n & \text{si } A_n \geq p_n \\ p_{n+1} = p_n \text{ et } \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n & \text{si } A_n < p_n \end{cases} \quad \text{et} \quad A_{n+1} = A_n + \varepsilon_n a_n .$$

III.1) Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un entier $n \geq N$ tel que $p_{n+1} = 1 + p_n$.

☺ *On pourra raisonner par l'absurde.*

En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers par :

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N}, n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} \end{cases}$$

III.2) Déterminer p_{n_k} et ε_{n_k} en fonction de *k*.

III.3) Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la série $\sum a_n\varepsilon_n$ diverge.

IV. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.

IV.1) Prouver que pour toute suite réelle $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle, la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.

IV.2) En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.

V. Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n u_n$.

V.1) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

V.2) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver que la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$ converge.

V.3) Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

V.4) Caractériser alors les suites vérifiant (P_2).

Exercice n° 2

(*extrait adapté de Centrale 2 - PC - 2018*)

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D son ensemble de définition.

Q1. Déterminer D.

Q2. Montrer que ζ est continue sur D.

Q3. Montrer que ζ est de classe C^∞ sur D.

Q4. Étudier le sens de variation de ζ.

Q5. Soit $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer que :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}.$$

Q6. En déduire, que pour tout $x \in D$:

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Q7. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Q8. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q9. Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

Exercice n° 3

(*extrait adapté de Mines 2 - PSI - 2020 et CNM 2 - PSI -2004*)

Soit n un entier naturel non nul.

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pourra noter $[A]_{i,j}$ les coefficients de A.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme infinie : pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} \left|[A]_{i,j}\right|$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_p(A) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k.$$

Q1. Montrer que, pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

Q2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $\left(S_p(A)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera $Exp(A)$ sa limite.

☺ *On pourra montrer que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, la série numérique $\sum \frac{[A^k]_{i,j}}{k!}$ est absolument convergente.*

Q3. Montrer que pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $Exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\left(Exp(A)\right)P$.

Q4. Déterminer $Exp(D)$ où D est une matrice diagonale : $D = diag\left(a_1, a_2, \dots, a_n\right)$.

Q5. Montrer que l'application $M \mapsto {}^tM$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $Exp({}^tA) = {}^t\left(Exp(A)\right)$.

Q6. Dans cette question, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire l'expression de la matrice $S_p(A)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, puis celle de $Exp(A)$.

(c) Déterminer $Exp(B)$ où $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Q7. Dans cette question, on pose $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

☺ *On a dmettra l'existence de P, λ et μ (c'est le théorème spectral) et on remarquera en justifiant que $\lambda + \mu = Tr(C) = 2\alpha$ et $\lambda\mu = \det C$.*

(b) En déduire l'expression de $Exp(C)$.

(c) En reprenant les matrices A et B de la question précédente, donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $Exp(A+B) = Exp(A)Exp(B)$.

Q8. Pour tout réel a, on pose $R(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$.

Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

(a) Prouver que les séries $\sum \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent et calculer leur somme.

(b) Montrer que $Exp\left(rR(\theta)\right) = e^{r\cos\theta} R(r\sin\theta)$.

(c) Expliciter alors une matrice $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Exp(J) = -I_2$.

Q9. On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement semblables s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} = {}^tP$ (la matrice P est dite orthogonale) et $B = P^{-1}AP$.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $A\,{}^tA = {}^tAA$.

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices normales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\mathcal{E}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Qu'en déduit-on pour $Exp(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?

(c) L'ensemble $\mathcal{E}_n$ est-il convexe ?

(d) On admet qu'une matrice est normale si et seulement si elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

— soit de taille 1×1 ;

— soit de taille 2×2 et du type $rR(\theta)$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Montrer que $Exp(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonalement semblables à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

— soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, avec $\mu > 0$;

— soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

☺☺☺☺☺☺ ***Fin du sujet*** ☺☺☺☺☺☹