Corrigé du DM n° 4

I.1. On a $\lambda > 0$ et $\mathcal{P} = \left\{ (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \setminus \forall\, n \in \mathbb{N},\, p_n \geq 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \right\}$.

La suite $\left(c\dfrac{\lambda^n}{n!} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c\dfrac{\lambda^n}{n!} \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} c\dfrac{\lambda^n}{n!} = 1$.

Or, $\sum_{n=0}^{+\infty} c\dfrac{\lambda^n}{n!} = c\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\lambda^n}{n!} = c\,e^{\lambda}$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} c\dfrac{\lambda^n}{n!} = 1$ si et seulement si $c = e^{-\lambda}$. Dans ce cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c\dfrac{\lambda^n}{n!} \geq 0$ et finalement :

$$\boxed{\left(c\frac{\lambda^n}{n!} \right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P} \iff c = e^{-\lambda}}$$

I.2. On pose $P = (1-p,\, p,\, 0, \dots)$ et $Q = (1-q,\, q,\, 0, \dots)$.

Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Considérons quatre cas.

- Si $0 \in A$ et $1 \in A$, alors $\sum_{n\in A} p_n = 1 - p + p = 1$, $\sum_{n\in A} q_n = 1$, donc $\left| \sum_{n\in A} p_n - \sum_{n\in A} q_n \right| = 0$.
- Si $0 \in A$ et $1 \notin A$, alors $\sum_{n\in A} p_n = 1 - p$, $\sum_{n\in A} q_n = 1 - q$, donc $\left| \sum_{n\in A} p_n - \sum_{n\in A} q_n \right| = |p - q|$.
- Si $0 \notin A$ et $1 \in A$, alors $\sum_{n\in A} p_n = p$, $\sum_{n\in A} q_n = q$, donc $\left| \sum_{n\in A} p_n - \sum_{n\in A} q_n \right| = |p - q|$.
- Si $0 \notin A$ et $1 \notin A$, alors $\sum_{n\in A} p_n = \sum_{n\in A} q_n = 0$, donc $\left| \sum_{n\in A} p_n - \sum_{n\in A} q_n \right| = 0$.

Ainsi, $\sum_{A\subset\mathbb{N}} \sup \left| \sum_{n\in A} p_n - \sum_{n\in A} q_n \right| = |p - q|$, donc :

$$\boxed{dist\,(P,Q) = |p - q|}$$

I.3. $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (donc l'ensemble des suites réelles bornées).

Pour tout $f \in \mathcal{F}$, il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(n)| \leq M$.

Alors, pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq 0$, donc $|f(n)\,p_n| = |f(n)|\,p_n \leq M p_n$.

Or, la série $\sum p_n$ converge (et sa somme est 1), donc par comparaison, $\sum |f(n)\,p_n|$ converge, donc

$$\boxed{\text{Pour tout } f \in \mathcal{F} \text{ et tout } p \in \mathcal{P},\ \sum f(n)\,p_n \text{ converge.}}$$

II.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k\, f(k)\, p_k^{(\lambda)} = \sum_{k=0}^{n} k\, f(k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} k\, f(k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{n} f(k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Et en réindexant :

$$\sum_{k=0}^{n} k\, f(k)\, p_k^{(\lambda)} = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)\, p_k^{(\lambda)} .$$

Or, si f appartient à $\mathcal{F}$, la fonction $n \mapsto f(n+1)$ appartient aussi à $\mathcal{F}$. Comme $P_\lambda \in \mathcal{P}$ d'après **I.1**, la série de terme général $f(n+1)\, p_n^{(\lambda)}$ converge d'après **I.3** et ainsi :

$$\boxed{\text{La série de terme général } n\, f(n)\, p_n^{(\lambda)} \text{ est convergente.}}$$

II.5. On vient de voir que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} n\, f(n)\, p_n^{(\lambda)} = \lambda \sum_{n=0}^{N-1} f(n+1)\, p_n^{(\lambda)} .$$

Comme les deux séries convergent, on peut passer à la limite quand *n* tend vers l'infini, ce qui donne :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n\, f(n)\, p_n^{(\lambda)} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)\, p_n^{(\lambda)}}$$

II.6. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_k(n) = \delta_{n,k}$ (le symbole de Kronecker).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(n)$ vaut 0 ou 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $f_k \in \mathcal{F}$ et on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n f_k(n) q_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f_k(n+1) q_n \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n \delta_{n,k} q_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{n+1,k} q_n \quad \Leftrightarrow \quad k\, q_k = \lambda\, q_{k-1}.$$

Ainsi, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$q_k = \frac{\lambda}{k} q_{k-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k!}{\lambda^k} q_k = \frac{k!}{\lambda^k} \frac{\lambda}{k} q_{k-1} = \frac{(k-1)!}{\lambda^{k-1}} q_{k-1} .$$

La suite $\left(\dfrac{k!}{\lambda^k} q_k \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc constante, soit pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{k!}{\lambda^k} q_k = \frac{0!}{\lambda^0} q_0 = q_0 \quad \Leftrightarrow \quad q_k = q_0 \frac{\lambda^k}{k!} .$$

Et comme $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{P}$, $q_0 = e^{-\lambda}$ d'après la question **I.1**.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} = p_k^{(\lambda)}$, donc :

$$\boxed{Q = P_\lambda}$$

III.7. On a :

$$S_h = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \forall n \in \mathbb{N}, \lambda f(n+1) - n f(n) = \tilde{h}(n) \right\}.$$

Remarquons que pour une éventuelle fonction $f \in S_h$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda f(n+1) - n f(n) = \tilde{h}(n) \quad \Leftrightarrow \quad f(n+1) = \frac{n f(n) + \tilde{h}(n)}{\lambda}.$$

Ceci donne une relation de récurrence d'ordre 1, donc, avec cette relation, la donnée de $f(0)$ définit parfaitement une fonction f de S_h. Comme il y a une infinité de valeurs possibles pour $f(0)$:

$$\boxed{\text{L'ensemble } S_h \text{ possède une infinité d'éléments.}}$$

Soit $f \in S_h$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lambda f(k+1) - k f(k) = \tilde{h}(k) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda f(k+1)\frac{\lambda^k}{k!} - k f(k)\frac{\lambda^k}{k!} = \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} \quad \Leftrightarrow \quad f(k+1)\frac{\lambda^{k+1}}{k!} - f(k)\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} &= \tilde{h}(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} = \tilde{h}(0) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k+1)\frac{\lambda^{k+1}}{k!} - f(k)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right] \\ &= \tilde{h}(0) + f(n)\frac{\lambda^n}{(n-1)!} - \lambda f(1) \qquad \text{par télescopage}\end{aligned}$$

Or, on a $\lambda f(1) - 0 \times f(0) = \tilde{h}(0)$, donc $\tilde{h}(0) = \lambda f(1)$ et ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} = f(n)\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Enfin, pour $n = 1$, $\dfrac{(1-1)!}{\lambda^1}\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{\lambda}\tilde{h}(0) = f(1)$ (on vient de le voir), donc la relation ci-dessus reste vraie et ainsi, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}}$$

III.8. Commençons par justifier que la série $\sum \tilde{h}(n)\dfrac{\lambda^n}{n!}$ converge.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{h}(n) = h(n) - A$ avec $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}$, constante indépendante de n.

Comme la fonction h est un élément de $\mathcal{F}$, elle est bornée, donc $\tilde{h}$ l'est aussi et ainsi, $\tilde{h} \in \mathcal{F}$ et, d'après la question **I.3**, la série $\sum \tilde{h}(n)p_n^{(\lambda)}$ converge.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{h}(n)\dfrac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda \tilde{h}(n)p_n^{(\lambda)}$, donc la série $\sum \tilde{h}(n)\dfrac{\lambda^n}{n!}$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^\lambda \tilde{h}(k)p_k^{(\lambda)} = e^\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\tilde{h}(k)p_k^{(\lambda)} = e^\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\left[h(k) - A\right]p_k^{(\lambda)} = e^\lambda\left(\sum_{k=0}^{+\infty}h(k)p_k^{(\lambda)} - A\sum_{k=0}^{+\infty}p_k^{(\lambda)}\right).$$

Or, $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k^{(\lambda)} = 1$ et $A = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\, p_k^{(\lambda)}$, donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} = 0\,.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} = -\sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}$ et donc, le résultat de la question précédente se récrit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}}$$

III.9. On a vu que $\tilde{h} \in \mathcal{F}$, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\left|\tilde{h}(k)\right| \le M$.

Remarquons que l'on a $\left|\tilde{h}\right| \in \mathcal{F}$ et donc, la série $\sum \left|\tilde{h}(n)\right| \frac{\lambda^n}{n!} = \sum e^{\lambda} \left|\tilde{h}(n)\right| p_n^{(\lambda)}$ converge.

Alors, pour toute $f \in \mathcal{S}_h$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|f(n)\right| = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\left|\sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}\right| \le \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{+\infty} \left|\tilde{h}(k)\right|\frac{\lambda^k}{k!} \le \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{+\infty} M\,\frac{\lambda^k}{k!} \le M\,\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\,.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{k!}\lambda^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(n+k)!}\lambda^k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!k!}{(n+k)!}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n+k}{n}}\frac{\lambda^k}{k!}\,.$$

Comme tous les coefficients binomiaux sont supérieurs ou égal à 1, on a :

$$\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{\lambda}}{n}\,.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|f(n)\right| \le M\,\frac{e^{\lambda}}{n} \le Me^{\lambda}\,.$$

Et donc :

$$\boxed{\text{Toute fonction } f \in \mathcal{S}_h \text{ est bornée.}}$$

IV.10. Ici, $h = \mathbf{1}_{\{m\}}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(n) = \delta_{n,m}$ (le symbole de Kronecker). On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\, p_k^{(\lambda)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{k,m}\, p_k^{(\lambda)} = p_m^{(\lambda)} \quad \Rightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \tilde{h}(n) = h(n) - p_m^{(\lambda)} = \delta_{n,m} - p_m^{(\lambda)}\,.$$

Soit $f_m \in \mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$ et $n \in [\![1, m]\!]$ (remarquons que ceci implique que $m \ge 1$, alors que l'énoncé donne juste $m \ge 0$, le résultat de cette question n'a pas lieu d'être quand $m = 0$). D'après la question **III.7**, on a :

$$f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\delta_{k,m} - p_m^{(\lambda)}\right]\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k,m}\frac{\lambda^k}{k!} - p_m^{(\lambda)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\right].$$

Or, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $k < n \leq m$, donc $k \neq m$ et $\delta_{k,m} = 0$.

Ceci donne pour tout $n \in [\![1, m]\!]$:

$$\boxed{f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}}$$

IV.11. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > m$ (remarquons qu'ici, on revient à $m \geq 0$).

D'après la question **III.8**, on a :

$$f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \left[\delta_{k,m} - p_m^{(\lambda)}\right] \frac{\lambda^k}{k!} = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \left[0 - p_m^{(\lambda)}\right] \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Soit pour tout entier $n > m$:

$$\boxed{f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} > 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} > 0$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} < 0$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\begin{cases} f_m(n) < 0 & \text{quand } n \leq m \ \text{ (si } m \geq 1) \\ f_m(n) > 0 & \text{quand } n > m \end{cases}}$$

IV.12. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta f_m(n) = f_m(n+1) - f_m(n)$.

Pour $1 \leq n < m$ (quand $m \geq 2$), on a $1 \leq n+1 \leq m$, donc n et $n+1$ sont dans $[\![1, m]\!]$, d'où :

$$\Delta f_m(n) = -\frac{n!}{\lambda^{n+1}} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{(n-1)!}{\lambda^{n+1}} p_m^{(\lambda)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} - \sum_{k=0}^{n} n \frac{\lambda^k}{k!}\right].$$

Et :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} - \sum_{k=0}^{n} n \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} n \frac{\lambda^k}{k!} - n = -\left[n + \sum_{k=1}^{n} (n-k) \frac{\lambda^k}{k!}\right] < 0.$$

Donc, pour $1 \leq n < m$, on a $\Delta f_m(n) < 0$.

Pour $n > m \geq 0$, on a aussi $n+1 > m$ et :

$$\Delta f_m(n) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{(n-1)!}{\lambda^{n+1}} p_m^{(\lambda)} \left[n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right].$$

Et :

$$n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n \frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n \frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n-k) \frac{\lambda^k}{k!} < 0.$$

Donc, pour $n > m \geq 0$, on a $\Delta f_m(n) < 0$.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, m\},\ \Delta f_m(n) < 0.}$$

IV.13. Soit $m>0$.

- On a $m\in[\![1,m]\!]$, donc :

$$f_m(m)=-\frac{(m-1)!}{\lambda^m}p_m^{(\lambda)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda^k}{k!}=-\frac{(m-1)!}{\lambda^m}e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=-\frac{e^{-\lambda}}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=-\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{m}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

- Et $m+1>m$, donc :

$$f_m(m+1)=\frac{m!}{\lambda^{m+1}}p_m^{(\lambda)}\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\frac{m!}{\lambda^{m+1}}e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Alors :

$$\Delta f_m(m)=f_m(m+1)-f_m(m)=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}+\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{m}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Soit, pour $m>0$:

$$\boxed{\Delta f_m(m)=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{m}\frac{\lambda^k}{k!}\right)}$$

Le résultat de la question **IV.12** était obtenu pour tout $m\geq 0$ et tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,m\}$, donc, entre autres, pour $m=0$, on a :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\geq 1,\ \Delta f_0(n)<0.}$$

IV.14. On vient de voir que pour tout $m>0$, $\Delta f_m(m)=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{m}\frac{\lambda^k}{k!}\right)$.

Or, pour tout $k\in[\![1,m]\!]$, on a $\frac{k}{m}\leq 1$, donc $\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{m}\frac{\lambda^k}{k!}\leq\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}$. Ainsi :

$$\Delta f_m(m)\leq\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}\right)=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right)=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}-1\right)=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda}-1).$$

Donc, pour tout $m>0$:

$$\Delta f_m(m)\leq\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

De plus, comme $\lambda>0$, on a $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}>0$, donc pour tout $m\geq 0$ et tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,m\}$, $\Delta f_0(n)<0<\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.

Ainsi, on a pour tout $m\geq 0$:

$$\forall\, n\geq 1,\ \Delta f_m(n)\leq\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Ceci implique que pour tout $m\geq 0$:

$$\boxed{\sup_{n\geq 1}\Delta f_m(n)\leq\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}}$$

IV.15. Notons provisoirement $\mu = \inf_{k\in\mathbb{N}} h(k)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_+(n) = h(n) - \mu$ et :

$$\tilde{h}_+(n) = h_+(n) - \sum_{k=0}^{+\infty} h_+(k) p_k^{(\lambda)} = h(n) - \mu - \sum_{k=0}^{+\infty}\left[h(k)-\mu\right] p_k^{(\lambda)} = h(n) - \mu - \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) p_k^{(\lambda)} + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} p_k^{(\lambda)} .$$

Et comme $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k^{(\lambda)} = 1$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{h}_+(n) = h(n) - \mu - \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) p_k^{(\lambda)} + \mu = h(n) - \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) p_k^{(\lambda)} = \tilde{h}(n).$$

Ainsi :

$$\left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \forall n \in \mathbb{N}, \lambda f(n+1) - n f(n) = \tilde{h}_+(n) \right\} = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \forall n \in \mathbb{N}, \lambda f(n+1) - n f(n) = \tilde{h}(n) \right\}.$$

Soit :

$$\boxed{S_{h_+} = S_h}$$

IV.16. Soit $n \geq 1$ fixé. On a vu que dans la question **IV.10** que pour tout entier $m \geq n$, on a :

$$f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} .$$

Donc, pour tout entier $M \geq n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{M} h_+(m) f_m(n) &= \sum_{m=0}^{n-1} h_+(m) f_m(n) + \sum_{m=n}^{M} h_+(m) f_m(n) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} h_+(m) f_m(n) - \sum_{m=n}^{M} h_+(m) \left(\frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} h_+(m) f_m(n) - \left(\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \sum_{m=n}^{M} h_+(m) p_m^{(\lambda)}
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{m=0}^{n-1} h_+(m) f_m(n)$ et $\left(\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$ ne dépendent pas de *M*, la série $\sum h_+(m) f_m(n)$ converge si et seulement si $\sum h_+(m) p_m^{(\lambda)}$ converge.

Or, $h \in \mathcal{F}$, donc $h_+ = h - \mu \in \mathcal{F}$ et d'après la question **I.3**, la série $\sum h_+(m) p_m^{(\lambda)}$ converge et donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum h_+(m) f_m(n) \text{ converge pour tout entier } n \geq 1.}$$

IV.17. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) f_m(n)$.

On a d'une part :

$$\lambda f(1) - 0 \times f(0) = \lambda f(1) = \lambda \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) f_m(1) = \lambda h_+(0) f_0(1) + \lambda \sum_{m=1}^{+\infty} h_+(m) f_m(1) .$$

Or :

$$\begin{cases} f_0(1) = \dfrac{(1-1)!}{\lambda^1} p_0^{(\lambda)} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} = \dfrac{e^\lambda - 1}{\lambda} p_0^{(\lambda)} \\ f_m(1) = -\dfrac{(1-1)!}{\lambda^1} p_m^{(\lambda)} \displaystyle\sum_{k=0}^{1-1} \dfrac{\lambda^k}{k!} = -\dfrac{1}{\lambda} p_m^{(\lambda)} \quad \text{pour tout } m \geq 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\lambda f(1) - 0 \times f(0) = \lambda h_+(0) \frac{e^\lambda - 1}{\lambda} p_0^{(\lambda)} + \lambda \sum_{m=1}^{+\infty} h_+(m) \left(-\frac{1}{\lambda} p_m^{(\lambda)} \right) = (e^\lambda - 1) h_+(0) p_0^{(\lambda)} - \sum_{m=1}^{+\infty} h_+(m) p_m^{(\lambda)}$$

$$= e^\lambda h_+(0) p_0^{(\lambda)} - \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) p_m^{(\lambda)} = h_+(0) - \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) p_m^{(\lambda)} = \tilde{h}_+(0)$$

Et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\lambda f(n+1) - n f(n) = \lambda \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) f_m(n+1) - n \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) f_m(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) \left[\lambda f_m(n+1) - n f_m(n) \right].$$

Or, $f_m \in \mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda f_m(n+1) - n f_m(n) = \tilde{1}_{\{m\}}(n) = \delta_{n,m} - p_m^{(\lambda)}$, d'où :

$$\lambda f(n+1) - n f(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) \left[\delta_{n,m} - p_m^{(\lambda)} \right] = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) \delta_{n,m} - \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) p_m^{(\lambda)} = h_+(n) - \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) p_m^{(\lambda)} = \tilde{h}_+(n).$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda f(n+1) - n f(n) = \tilde{h}_+(n)$, donc $f \in \mathcal{S}_{h_+}$ et comme $\mathcal{S}_{h_+} = \mathcal{S}_h$, on a bien :

$$\boxed{f \in \mathcal{S}_h}$$

IV.18. Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) f_m(n+1) - \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) f_m(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) \left[f_m(n+1) - f_m(n) \right] = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) \Delta f_m(n).$$

Or, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $h_+(m) = h(m) - \inf\limits_{k \in \mathbb{N}} h(k) \geq 0$ et :

- d'après la question **IV.12**, $\Delta f_m(n) \leq 0$ pour tout $n \geq 1$ tel que $n \neq m$;
- d'après la question **IV.14**, $\Delta f_n(n) \leq \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$ pour tout $n \geq 1$.

Alors :

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{+\infty} h_+(m) \Delta f_m(n) + h_+(n) \Delta f_n(n) \leq h_+(n) \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left[h(n) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right].$$

Enfin, pour tout $n \geq 1$, on a $h(n) \leq \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} h(n)$ et comme $\dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} > 0$, on a :

$$\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left[h(n) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right] \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} h(n) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right].$$

Et ainsi, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\boxed{\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} h(n) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right]}$$