

Corrigé du DS de n° 3

Exercice 1 (extrait : E3A - PSI - 2011)

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont des fonctions rationnelles définies et de classe C^∞ sur \mathbb{R} (les dénominateurs ne s'annulent jamais). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$u_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^2 n^2}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{(2\pi)^2 n^2}$ converge :

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent simplement sur \mathbb{R} .

(2) On prend un réel $a > 0$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est dérivable sur \mathbb{R} avec :

$$u_n'(t) = -\frac{2(t+2\pi n)}{[1+(t+2\pi n)^2]^2}.$$

Pour tout $t \in [-a, a]$, on a $t+2\pi n \geq -a+2\pi n \geq 0$, soit $u_n'(t) \leq 0$, quand $n \geq N = E\left(\frac{a}{2\pi}\right) + 1$.

Dans ce cas, la fonction u_n est décroissante sur $[-a, a]$, et comme elle est positive sur \mathbb{R} :

$$\forall t \in [-a, a], |u_n(t)| = u_n(t) \leq u_n(-a).$$

Ainsi, avec $N = E\left(\frac{a}{2\pi}\right) + 1$:

Pour tout entier $n \geq N$, $\sup_{t \in [-a, a]} |u_n(t)| = u_n(-a)$.

(b) On a $u_n(-a) = \frac{1}{1+(-a+2\pi n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ converge, donc $\sum u_n(-a)$ converge et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [-a, a]} |u_n(t)| = u_n(-a)$ à partir d'un certain rang :

La série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-a, a]$.

On a pour tout $t \in [-a, a]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n'(t)| = \frac{2|t+2\pi n|}{[1+(t+2\pi n)^2]^2} \leq \frac{2|t+2\pi n|}{(t+2\pi n)^4} = \frac{2}{|t+2\pi n|^3}.$$

Alors, pour tout $t \in [-a, a]$ et tout $n \geq N$:

$$|u_n'(t)| \leq \frac{2}{(-a + 2\pi n)^3}.$$

Comme $\frac{2}{(-a + 2\pi n)^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4\pi^3 n^3}$ et $\sum \frac{1}{4\pi^3 n^3}$ converge, la série $\sum \frac{2}{(-a + 2\pi n)^3}$ converge et $\sum u_n'$ vérifie l'hypothèse de domination sur $[-a, a]$, donc :

La série $\sum u_n'$ converge uniformément sur $[-a, a]$.

(3) On pose $F = u_0 + \sum_{n \geq 1} u_n + \sum_{n \geq 1} v_n = \sum_{n \geq 0} u_n + \sum_{n \geq 1} v_n$.

(a) On vient de voir que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions u_n et v_n sont de classe C^1 sur \mathbb{R} ;
- $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent simplement sur \mathbb{R} ;
- $\sum u_n'$ et $\sum v_n'$ convergent uniformément sur $[-a, a]$, pour tout réel $a > 0$.

Ces hypothèses permettent de conclure que les fonctions $U = \sum_{n \geq 1} u_n$ et $V = \sum_{n \geq 1} v_n$ sont de classe C^1 sur $[-a, a]$, pour tout réel $a > 0$, donc sur \mathbb{R} .

Comme $F = u_0 + U + V$ est une somme de fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R} :

F est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions u_n et v_n , ainsi que la fonction F , sont définies sur \mathbb{R} , qui est symétrique par rapport à 0.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_0(-t) = \frac{1}{1+(-t)^2} = \frac{1}{1+t^2} = u_0(t)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(-t) = \frac{1}{1+(-t+2\pi n)^2} = \frac{1}{1+(t-2\pi n)^2} = v_n(t).$$

On alors $v_n(-t) = u_n(t)$ et :

$$F(-t) = u_0(-t) + \sum_{n \geq 1} u_n(-t) + \sum_{n \geq 1} v_n(-t) = u_0(t) + \sum_{n \geq 1} v_n(t) + \sum_{n \geq 1} u_n(t) = F(t).$$

Ainsi :

La fonction F est paire.

(c) Comme vu plus haut, les fonctions u_n , v_n (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et F sont définies sur \mathbb{R} et :

$$t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t + 2\pi \in \mathbb{R}.$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(t + 2\pi) = \frac{1}{1 + (t + 2\pi + 2\pi n)^2} = \frac{1}{1 + (t + 2\pi(n+1))^2} = u_{n+1}(t)$$

Et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n(t + 2\pi) = \frac{1}{1 + (t + 2\pi - 2\pi n)^2} = \frac{1}{1 + (t - 2\pi(n-1))^2} = v_{n-1}(t).$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(t + 2\pi) &= \sum_{n \geq 0} u_n(t + 2\pi) + \sum_{n \geq 1} v_n(t + 2\pi) \\ &= \sum_{n \geq 0} u_{n+1}(t) + \sum_{n \geq 1} v_{n-1}(t) \\ &= \sum_{n \geq 1} u_n(t) + \sum_{n \geq 0} v_n(t) \\ &= v_0(t) + \sum_{n \geq 1} u_n(t) + \sum_{n \geq 1} v_n(t) \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_0(t) = \frac{1}{1+t^2} = v_0(t)$, donc $F(t + 2\pi) = u_0(t) + \sum_{n \geq 1} u_n(t) + \sum_{n \geq 1} v_n(t) = F(t)$

et finalement :

La fonction F est 2π -périodique.

Exercice 2 (extrait : Centrale - PSI - 2015)

On a :

- $f \in C^2([0,1],[0,1])$,
- $f' \geq 0$, $f'' \geq 0$,
- $f(1) = 1$, $f'(0) < 1$, $f''(1) > 0$, $f'(1) = m$,
- $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

I.A.1) Comme f est à images dans $[0,1]$, on a $u_1 = f(u_0) = f(0) \geq 0 = u_0$.

Comme $f' \geq 0$, f est croissante sur $[0,1]$, donc si $u_{n+1} \geq u_n$, alors $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$.

Ainsi, $u_0 \leq u_1$ et $u_n \leq u_{n+1}$ implique $u_{n+1} \leq u_{n+2}$: ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et donc que :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

De plus, $u_0 = 0 \in [0,1]$ et comme f est à images dans $[0,1]$, on a $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$. Ainsi, tous les termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans $[0,1]$, donc la suite est bornée et comme elle est croissante :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in [0,1]$.

IA.2) Posons $g(x) = f(x) - x$ et $F = \{x \in [0,1], f(x) = x\} = \{x \in [0,1], g(x) = 0\}$.

On a $g(1) = f(1) - 1 = 0$, donc $1 \in F$.

L'ensemble F est alors une partie non vide de \mathbb{R} , incluse dans $[0,1]$, donc minorée par 0 : il admet une borne inférieure $\alpha \in [0,1]$.

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F qui converge vers α , et par continuité de g , $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = g(\alpha)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$, donc $g(x_n) = 0$ et ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = 0 = g(\alpha)$, donc $\alpha \in F$. Ainsi, α est le plus petit élément de F , qui est l'ensemble des solutions $f(x) = x$, donc :

L'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution.

On note $x_f = \min F$.

IA.3) Comme f est continue sur $[0,1]$, donc en ℓ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $\ell = f(\ell)$, donc $\ell \in F$ et $\underline{x_f \leq \ell}$.

On a $u_0 = 0 \in [0, x_f]$.

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ donné, $u_n \in [0, x_f]$. On a alors par croissance de f :

$$0 \leq u_n \leq x_f \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(x_f) \Rightarrow 0 \leq f(0) \leq u_{n+1} \leq x_f \quad (\text{car } f(x_f) = x_f).$$

Ainsi, $u_{n+1} \in [0, x_f]$.

Ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, x_f]$ et en passant à la limite, on obtient $\ell \in [0, x_f]$, soit $\underline{\ell \leq x_f}$.

Ainsi, $x_f \leq \ell$ et $x_f \geq \ell$, donc :

$$\ell = x_f$$

LB) Comme $F \subset [0,1]$ et $x_f = \min F$, montrer que $x_f \in [0,1[$ revient à montrer que f admet un point fixe strictement inférieur à 1.

f est de classe C^2 sur $[0,1]$, donc g aussi en tant que différence de telles fonctions, et $g'' = f'' \geq 0$ donc g' est croissante sur $[0,1]$ de $g'(0) = f'(0) - 1 < 0$ à $g'(1) = f'(1) - 1 = m - 1 > 0$.

Ainsi, g' (qui est continue) s'annule au moins une fois en $\beta \in]0,1[$ et :

- sur $[0,\beta]$, $g' \leq 0$ donc g est décroissante de $g(0) = f(0) \geq 0$ à $g(\beta)$;
- sur $[\beta,1]$, $g' \geq 0$ donc g est croissante de $g(\beta)$ à $g(1) = f(1) - 1 = 0$.

Ce dernier point prouve que $g(\beta) \leq 0$ et, comme $g(0) \geq 0$ et g est continue sur $[0,\beta]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $\gamma \in [0,\beta] \subset [0,1[$ tel que $g(\gamma) = 0$, soit $f(\gamma) = \gamma$.

Ceci permet de conclure que :

$$x_f \in [0,1[$$

LC) Ici $m \leq 1$, donc $g'(1) = f'(1) - 1 = m - 1 \leq 0$ et on a toujours g' croissante sur $[0,1]$.

De plus, $g''(1) = f''(1) > 0$ et g'' est continue sur $[0,1]$, donc il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que $g'' > 0$ sur $[\varepsilon,1]$, donc g' est strictement croissante sur $[\varepsilon,1]$.

Ainsi, pour tout $x \in [\varepsilon,1[$, $g'(x) < g'(1) \leq 0$ et pour tout $x \in [0,\varepsilon]$, $g'(x) \leq g'(\varepsilon) < 0$. Ainsi, $g' < 0$ sur $[0,1[$, donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$.

Alors, pour tout $x \in [0,1[$, $g(x) < g(1) = 0$ donc $g(x) \neq 0$ et ainsi, $F = \{1\}$, d'où :

$$x_f = 1$$

On vient de voir que pour tout $x \in [0,1[$, $g(x) < 0$, soit $f(x) < x$.

Prouvons alors par récurrence sur pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.

- On a $u_0 = 0 \neq 1$.
- Si, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \neq 1$, alors $u_n < 1$ donc $u_{n+1} = f(u_n) < f(1) = 1$ et ainsi, $u_{n+1} \neq 1$.

La propriété est initialisée et héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \neq 1$$

LD.1) Ici $m = 1$.

Comme f est C^2 sur $[0,1]$, la formule de Taylor-Young en 1 permet d'écrire :

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2) = 1 + m(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2).$$

Comme $m=1$, on a $\ell = x_f = 1$ donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ et, on peut écrire :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 1 + m(u_n - 1) + \frac{f''(1)}{2}(u_n - 1)^2 + o_{n \rightarrow +\infty}((u_n - 1)^2).$$

Soit, avec $\varepsilon_n = 1 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_{n+1} = m\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(\varepsilon_n^2).$$

Donc, avec $m=1$ et $\varepsilon_n \neq 0$ (d'après la question précédente) :

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n \varepsilon_{n+1}} = \frac{\frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(\varepsilon_n^2)}{\varepsilon_n \left(\varepsilon_n + o_{n \rightarrow +\infty}(\varepsilon_n) \right)} = \frac{\frac{f''(1)}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1)}{1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}}$$

1.D.2) Grace au lemme de Césaro, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k} \right) = \frac{f''(1)}{2}.$$

Or, $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k} \right) = \frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_n} - 1$ par télescopage (avec $\varepsilon_0 = 1 - u_0 = 1$), donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\varepsilon_n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n\varepsilon_n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{f''(1)}{2}.$$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n\varepsilon_n} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\varepsilon_n}$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\varepsilon_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(1-u_n)} = \frac{f''(1)}{2}.$$

On a $f''(1) > 0$, donc $f''(1) \neq 0$ et on peut écrire, $n(1-u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{f''(1)}$, soit :

$$\boxed{1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{f''(1)n}}$$

I.E.1) Ici $m < 1$, on a toujours $\ell = x_f = 1$, $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\varepsilon_{n+1} = m\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(\varepsilon_n^2)$.

Donc :

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = m - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n + o_{n \rightarrow +\infty}(\varepsilon_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = m.$$

Comme $\varepsilon_n > 0$ et $m < 1$, la règle de d'Alembert permet de conclure que :

La série $\sum \varepsilon_n$ converge.

Comme f' est croissante est positive sur $[0,1]$, si $f'(1) = m = 0$, alors f' est nulle et f'' aussi, ce qui est absurde car $f''(1) > 0$, donc $m > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n} > 0$.

On peut alors poser $v_n = \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, :

$$v_n = \ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{m\varepsilon_n}\left(m\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(\varepsilon_n^2)\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{f''(1)}{2m}\varepsilon_n + o_{n \rightarrow +\infty}(\varepsilon_n)\right).$$

Donc, comme $\frac{f''(1)}{2m} > 0$, on a $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{f''(1)}{2m}\varepsilon_n$ et, comme $\sum \varepsilon_n$ converge, $\sum v_n$ converge, soit :

La série $\sum \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$ converge.

I.E.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}) - \ln(m^{-n}\varepsilon_n)$, donc la convergence de la série $\sum v_n$ implique la convergence de la suite $\left(\ln(m^{-n}\varepsilon_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Notons a la limite de cette suite.

Par continuité de la fonction exponentielle en a , on alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m^{-n}\varepsilon_n = e^a.$$

Ainsi, en posant $c = e^a > 0$, on a :

$$\varepsilon_n = 1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c m^n$$

Exercice 3 (extrait : Mines - PSI - 2019)

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{\frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!} z^{n+1}}{\frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \frac{1}{(pn+p)(pn+p-1)\dots(pn+1)} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ converge, donc :

La série entière $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Comme $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} (z^p)^n$ converge aussi pour tout $z \in \mathbb{C}$, et donc :

La série entière $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}$ a un rayon de convergence infini.

On fixe un réel $x > 0$.

2) La fonction $\varphi: t \mapsto t^{1-r}(t-1)^r$ est définie, continue sur $]1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que produit de telles fonctions et pour tout $t \in]1, +\infty[$:

$$\varphi'(t) = (1-r)t^{-r}(t-1)^r + rt^{1-r}(t-1)^{r-1} = \frac{(t-1)^{r-1}}{t^r} [(1-r)(t-1) + rt] = \frac{(t-1)^{r-1}}{t^r} (t-1+r).$$

Sur $]1, +\infty[$, $\varphi'(t) > 0$, donc sur $]1, +\infty[$, φ est continue et strictement croissante de $\varphi(1) = 0$ à $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$ (car $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t$). Donc, d'après le théorème de la bijection continue, φ réalise une bijection de $]1, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ et $x > 0$ admet un unique antécédent $t_x = \varphi^{-1}(x)$ dans $]1, +\infty[$.

Comme $\varphi_x = \varphi - x$, φ_x s'annule en un unique élément de $]1, +\infty[$.

De plus, comme φ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, on a pour tout $t \in]1, +\infty[$:

$$\varphi_x(t) > 0 \Leftrightarrow \varphi(t) - x > 0 \Leftrightarrow \varphi(t) > x \Leftrightarrow t > \varphi^{-1}(x) = t_x.$$

Ainsi :

Il existe un unique $t_x \in]1, +\infty[$ tel que $\varphi_x(t_x) = 0$ et $\varphi_x < 0$ sur $]1, t_x[$ et $\varphi_x > 0$ sur $]t_x, +\infty[$.

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{(n+1)^r}{(n+1)!} x^{n+1} - \frac{n^r}{n!} x^n = \frac{(n+1)^{r-1}}{n!} x^{n+1} - \frac{n^r}{n!} x^n = \frac{(n+1)^{r-1}}{n!} x^n (x - n^r (n+1)^{1-r}).$$

Donc, $u_{n+1}(x) - u_n(x) = -\frac{(n+1)^{r-1}}{n!} x^n \varphi_x(n+1)$ et comme $\frac{(n+1)^{r-1}}{n!} x^n > 0$, $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ est du signe opposé à celui de $\varphi_x(n+1)$. Ainsi :

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow \varphi_x(n+1) \leq 0 \Leftrightarrow n+1 \in [1, t_x] \Leftrightarrow n+1 \leq \lfloor t_x \rfloor = N_x.$$

Et ainsi, $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante jusqu'au rang N_x , donc :

$$\boxed{(u_n(x))_{0 \leq n \leq N_x} \text{ est croissante et } (u_n(x))_{n \geq N_x} \text{ est décroissante.}}$$

On note $M_x = u_{N_x}(x)$, le maximum de $\{u_n(x), n \in \mathbb{N}\}$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x + \alpha \in [1, +\infty[$, soit $x \geq 1 - \alpha$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_x(x + \alpha) &= (x + \alpha)^{1-r} (x + \alpha - 1)^r - x = x^{1-r} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{1-r} x^r \left(1 + \frac{\alpha - 1}{x}\right)^r - x \\ &= x \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{1-r} \left(1 + \frac{\alpha - 1}{x}\right)^r - x = x \left[1 + (1-r) \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \left[1 + r \frac{\alpha - 1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] - x \\ &= x \left[1 + r \frac{\alpha - 1}{x} + (1-r) \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] - x = \alpha - r + o(1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_x(x + \alpha) = \alpha - r}$$

On a vu que φ réalise une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$, donc φ^{-1} réalise une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(x) = +\infty$. De plus :

$$\varphi(t) = t^{1-r} (t-1)^r = t^{1-r} t^r \left(1 - \frac{1}{t}\right)^r = t \left(1 - \frac{1}{t}\right)^r = t \left(1 - r \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) = t - r + o(1).$$

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t - \varphi(t)) = r$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(x) = +\infty$, on a en posant $t = \varphi^{-1}(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi^{-1}(x) - x) = r.$$

Enfin, comme $t_x = \varphi^{-1}(x)$, on obtient :

$$\boxed{t_x - x - r \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$$

4) Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lfloor x \rfloor + k \geq 0$ et $\lfloor x \rfloor > 0$. On a toujours $u_{\lfloor x \rfloor}(x) \neq 0$ et :

$$\frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = \frac{\frac{(\lfloor x \rfloor + k)^r x^{\lfloor x \rfloor + k}}{(\lfloor x \rfloor + k)!}}{\frac{\lfloor x \rfloor^r x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor!}} = \frac{\lfloor x \rfloor!}{(\lfloor x \rfloor + k)!} \left(\frac{\lfloor x \rfloor + k}{\lfloor x \rfloor} \right)^r x^k.$$

Si $k = 0$, on a $u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = u_{\lfloor x \rfloor}(x)$, sinon :

$$\frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = \begin{cases} \frac{x^k}{(\lfloor x \rfloor + 1) \dots (\lfloor x \rfloor + k)} \left(1 + \frac{k}{\lfloor x \rfloor} \right)^r & \text{si } k > 0 \\ \frac{\lfloor x \rfloor \dots (\lfloor x \rfloor - |k| + 1)}{x^{|k|}} \left(1 + \frac{k}{\lfloor x \rfloor} \right)^r & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Or, $\left(1 + \frac{k}{\lfloor x \rfloor} \right)^r \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ et $\lfloor x \rfloor \dots (\lfloor x \rfloor - |k| + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (\lfloor x \rfloor + 1) \dots (\lfloor x \rfloor + k) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor^k$, donc, dans tous les cas (avec $\lfloor x \rfloor > 0$) :

$$\frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^k}{\lfloor x \rfloor^k} = \left(\frac{x}{\lfloor x \rfloor} \right)^k.$$

De plus, on a $0 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $1 \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor} < 1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\lfloor x \rfloor} = 1$, qui implique que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\lfloor x \rfloor} \right)^k = 1.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor}(x)} = 1$, soit :

$$\boxed{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x)}$$

5) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \geq m$, donc $\lfloor x \rfloor \geq m$.

On a vu que $t_x - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} r > 0$, donc il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout réel $x \geq A$, $t_x - x \geq 0$, soit $x \leq t_x$ qui, avec $\lfloor x \rfloor \geq m$, implique que $0 \leq \lfloor x \rfloor - m \leq \lfloor x \rfloor \leq N_x$. D'après la question 2, on a alors :

$$u_{\lfloor x \rfloor - m}(x) \leq u_{\lfloor x \rfloor - m + 1}(x) \leq \dots \leq u_{\lfloor x \rfloor}(x) \Rightarrow \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geq \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_{\lfloor x \rfloor - m}(x) = (m+1)u_{\lfloor x \rfloor - m}(x).$$

Or, d'après la question précédente, $u_{\lfloor x \rfloor - m}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x)$, donc il existe $B_m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout réel $x \geq B_m$, on a :

$$\left(1 - \frac{1}{m} \right) u_{\lfloor x \rfloor - m}(x) \leq u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \left(1 + \frac{1}{m} \right) u_{\lfloor x \rfloor - m}(x) \Rightarrow (m+1)u_{\lfloor x \rfloor - m}(x) = m \left(1 + \frac{1}{m} \right) u_{\lfloor x \rfloor - m}(x) \geq m u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

Alors, pour tout réel $x \geq \max(m, A, B_m)$, on a :

$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geq m u_{\lfloor x \rfloor}(x)$$

Comme pour tout $i \in \llbracket \lfloor x \rfloor - m, \lfloor x \rfloor \rrbracket$, $i^r \leq \lfloor x \rfloor^r \leq x^r$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\frac{x^i}{i!} \geq 0$, on peut écrire :

$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) = \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} \frac{i^r}{i!} x^i \leq \lfloor x \rfloor^r \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x^i}{i!} \leq x^r \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x^i}{i!} \leq x^r \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = x^r e^x.$$

Ainsi, pour tout réel $x \geq \max(m, A, B_m)$, on a $m u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \leq x^r e^x$, donc :

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m}$$

6) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Si on pose $m = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $C = \max(m, A, B_m)$ tel que défini dans la question

précédente, on a $\frac{1}{m} < \varepsilon$ et pour tout réel $x \geq C$, $u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m} < \varepsilon x^r e^x$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $x \geq C$, $u_{\lfloor x \rfloor}(x) < \varepsilon x^r e^x$. Ceci permet de conclure que :

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x).$$

Enfin, comme d'après la question 4, on a $u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Rappelons que $M_x = u_{N_x}(x)$ avec $N_x = \lfloor t_x \rfloor$ et que $t_x - x - r \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $x \geq D$, $-1 \leq t_x - x - r \leq 1$, et :

$$\lfloor r \rfloor - 1 \leq \lfloor t_x - x \rfloor \leq \lfloor r \rfloor + 1.$$

De plus, pour tous réels a et b , on a :

$$\begin{cases} a+b-1 < \lfloor a+b \rfloor \leq a+b \\ a-1 \leq \lfloor a \rfloor \leq a \\ b-1 \leq \lfloor b \rfloor \leq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b-1 < \lfloor a+b \rfloor \leq a+b \\ -a \leq -\lfloor a \rfloor < -a+1 \\ -b \leq -\lfloor b \rfloor < -b+1 \end{cases} \Rightarrow -1 < \lfloor a+b \rfloor - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor < 2.$$

Et comme $\lfloor a+b \rfloor - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor$ est entier, on obtient $0 \leq \lfloor a+b \rfloor - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor \leq 1$, soit :

$$\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon = 0 \text{ ou } 1.$$

Ainsi, $N_x = \lfloor t_x \rfloor = \lfloor t_x - x + x \rfloor = \lfloor t_x - x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \varepsilon$ avec $0 \leq \varepsilon \leq 1$ et :

$$\lfloor r \rfloor - 1 \leq \lfloor t_x - x \rfloor \leq \lfloor r \rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor r \rfloor - 1 + \lfloor x \rfloor + \varepsilon \leq N_x \leq \lfloor r \rfloor + 1 + \lfloor x \rfloor + \varepsilon.$$

D'où, avec $0 \leq \varepsilon \leq 1$:

$$\lfloor r \rfloor - 1 \leq \lfloor r \rfloor - 1 + \varepsilon \leq N_x - \lfloor x \rfloor \leq \lfloor r \rfloor + 1 + \varepsilon \leq \lfloor r \rfloor + 2.$$

Ainsi, $N_x = \lfloor x \rfloor + i$ où i est un entier compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.

On a alors :

$$\left. \begin{aligned} u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1}(x) &= o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x) \\ u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor}(x) &= o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x) \\ u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 1}(x) &= o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x) \\ u_{\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 2}(x) &= o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_x = u_{N_x}(x) = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x).$$

Donc :

$$\boxed{M_x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x)}$$

7) Comme $z \neq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|D_n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right| = \left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| = \frac{|1-z^n|}{|1-z|} \leq \frac{|1|+|z^n|}{|1-z|} = \frac{1+|z|^n}{|1-z|}.$$

Et comme $|z|=1$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{|D_n| \leq \frac{2}{|1-z|}}$$

D'après la question 1 (en prenant $p=1$), la série $\sum u_n(x) = \sum \frac{n^r}{n!} x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée :

Les séries $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum D_n u_n(x)$ sont absolument convergentes.

8) Comme les séries $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum D_n u_n(x)$ sont absolument convergentes, donc convergentes, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} D_n (u_{n-1}(x) - u_n(x)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_{n-1}(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} D_{n+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) \\ &= D_1 u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (D_{n+1} - D_n) u_n(x) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n u_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \frac{n^r}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} (zx)^n \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} D_n (u_{n-1}(x) - u_n(x)) = S_{r,1}(zx)}$$

La série $\sum D_n (u_{n-1}(x) - u_n(x))$ est absolument convergente, car $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum D_n u_n(x)$ le sont et on a :

$$\left| S_{r,1}(zx) \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} D_n (u_{n-1}(x) - u_n(x)) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |D_n (u_{n-1}(x) - u_n(x))| = \sum_{n=1}^{+\infty} |D_n| |u_{n-1}(x) - u_n(x)|.$$

De même, la série $\sum (u_{n-1}(x) - u_n(x))$ est absolument convergente, car $\sum u_n(x)$, et donc $\sum u_{n-1}(x)$, le sont, donc, avec la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| S_{r,1}(zx) \right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{|1-z|} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| = \frac{2}{|1-z|} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \\ &\leq \frac{2}{|1-z|} \left(\sum_{n=1}^{N_x} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| + \sum_{n=N_x+1}^{+\infty} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \right). \end{aligned}$$

On a vu que la suite $(u_n(x))_{n \geq N_x}$ est croissante jusqu'au rang N_x , puis décroissante, donc :

- pour $n \leq N_x$, $u_{n-1}(x) - u_n(x) \leq 0$ et $|u_{n-1}(x) - u_n(x)| = u_n(x) - u_{n-1}(x)$;
- pour $n > N_x$, $u_{n-1}(x) - u_n(x) \geq 0$ et $|u_{n-1}(x) - u_n(x)| = u_{n-1}(x) - u_n(x)$.

Alors :

$$\left| S_{r,1}(zx) \right| \leq \frac{2}{|1-z|} \left(\sum_{n=1}^{N_x} [u_n(x) - u_{n-1}(x)] + \sum_{n=N_x+1}^{+\infty} [u_{n-1}(x) - u_n(x)] \right).$$

Or :

$$\sum_{n=1}^{N_x} [u_n(x) - u_{n-1}(x)] + \sum_{n=N_x+1}^{+\infty} [u_{n-1}(x) - u_n(x)] = u_{N_x}(x) - u_0(x) + u_{N_x}(x) = 2M_x - u_0(x) \leq 2M_x.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\left| S_{r,1}(zx) \right| \leq \frac{4M_x}{|1-z|}}$$

On a établi dans la question 6 que $M_x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x)$.

L'inégalité ci-dessus donne alors immédiatement :

$$S_{r,1}(zx) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x)$$

9) Pour tout réel x , on a :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} (\omega^k x)^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{n^r}{n!} (\omega^k x)^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^r}{n!} x^n \sum_{k=0}^{p-1} (\omega^n)^k \right).$$

Comme $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$, $\omega^n = 1$ si et seulement si p divise n et dans ce cas, $\sum_{k=0}^{p-1} (\omega^n)^k = \sum_{k=0}^{p-1} 1 = p$.

Dans tous les autres cas, on a $\omega^n \neq 1$ et :

$$\sum_{k=0}^{p-1} (\omega^n)^k = \frac{1 - (\omega^n)^p}{1 - \omega^n} = \frac{1 - (e^{2i\pi})^n}{1 - \omega^n} = 0.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n p = p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} x^{pn} = p S_{r,p}(x).$$

On a donc bien pour tout réel x :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = p S_{r,p}(x)$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x).$$

Et, pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $|\omega^k| = 1$ et $\omega^k \neq 1$, donc $S_{r,1}(\omega^k x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x)$ d'après la question précédente. Alors :

$$\sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x).$$

De plus, on a admis la propriété désirée pour $p = 1$, soit $S_{r,1}(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} x^r e^x$ ou bien :

$$S_{r,1}(x) = x^r e^x + o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x).$$

Ainsi :

$$p S_{r,p}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = x^r e^x + o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x).$$

Soit $p S_{r,p}(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} x^r e^x$ et donc, on a bien le résultat désiré pour $p \geq 2$:

$$S_{r,p}(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} x^r e^x$$

Exercice 4 (extrait : CCP - PSI - 2018)

On a $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Q1. On a $\Delta(X^0) = \Delta(1) = X \cdot 0 = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\Delta(X^k) = X \cdot (kX^{k-1}) = kX^k.$$

Remarquons que $\Delta(X^k) = kX^k$ reste vrai pour $k = 0$ et ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\Delta(X^k) = kX^k$$

Q2. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\Delta \circ (\Delta - Id)(P) = \Delta(\Delta(P) - P) = \Delta(XP' - P) = X(XP' - P)' = X(P' + XP'' - P').$$

Soit :

$$\Delta \circ (\Delta - Id)(P) = X^2 P''$$

Q3. On a vu que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Delta(X^k) = kX^k \in \mathbb{R}_n[X]$, donc :

$$\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n) \subset \mathbb{R}_n[X].$$

Et ainsi :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X].$$

Q4. Notons $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\Delta_n(X^k) = \Delta(X^k) = kX^k$, donc :

$$M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n) = \text{diag}(0, 1, 2, 3, \dots, n)$$

Q5. On a vu dans la que question 2 que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Delta \circ (\Delta - Id)(P) = (\Delta^2 - \Delta)(P) = X^2 P''.$$

Donc, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Phi(P) = X^2 P'' + aXP' = (\Delta^2 - \Delta)(P) + a\Delta(P) = \Delta^2(P) + (a-1)\Delta(P).$$

Ainsi :

$$\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$$

Comme $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$, on a $\Delta^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ car $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ est stable par composition et, comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ est un espace vectoriel, donc stable par combinaisons linéaires, $\Delta^2 + (a-1)\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$, soit :

$$\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$$

Q6. D'après la question 3, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ .

Alors, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ^2 et donc par $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$, ce qui permet de conclure que :

$$\Phi \text{ induit un endomorphisme } \Phi_n \text{ de } \mathbb{R}_n[X].$$

Q7. On a $\Phi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n$ et $M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n) = \text{diag}(0, 1, 2, 3, \dots, n)$, donc :

$$M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n^2) = \left(M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n)\right)^2 = \text{diag}(0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2).$$

Et :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}_c}(\Phi_n) &= M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n) = M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n^2) + (a-1)M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n) \\ &= \text{diag}(0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2) + (a-1)\text{diag}(0, 1, 2, 3, \dots, n) \\ &= \text{diag}(0, 1+(a-1), 2^2+(a-1)2, 3^2+(a-1)3, \dots, n^2+(a-1)n) \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de Φ_n dans \mathcal{B}_c est diagonale, donc :

$$\Phi_n \text{ est diagonalisable.}$$

Q8. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP = \Phi(P) + bP.$$

Donc :

$$\varphi = \Phi + bId.$$

Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ (et par Id !), on peut conclure que :

$$\varphi \text{ induit un endomorphisme } \varphi_n \text{ de } \mathbb{R}_n[X].$$

On a immédiatement :

$$\varphi_n = \Phi_n + bId_{\mathbb{R}_n[X]} = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n + bId_{\mathbb{R}_n[X]}$$

Q9. On a :

$$M_{\mathcal{B}_c}(\varphi_n) = M_{\mathcal{B}_c}(\Phi_n + bId_{\mathbb{R}_n[X]}) = M_{\mathcal{B}_c}(\Phi_n) + bM_{\mathcal{B}_c}(Id_{\mathbb{R}_n[X]}) = M_{\mathcal{B}_c}(\Phi_n) + bI_{n+1}.$$

Or, on a vu dans la question 7 que :

$$M_{\mathcal{B}_c}(\Phi_n) = \text{diag}(0, a, \dots, k^2 + (a-1)k, \dots, n^2 + (a-1)n).$$

Donc :

$$M_{\mathcal{B}_c}(\varphi_n) = \text{diag}(0, a, \dots, k^2 + (a-1)k, \dots, n^2 + (a-1)n) + bI_{n+1}$$

Soit :

$$M_{\mathcal{B}_c}(\varphi_n) = \text{diag}(b, a+b, \dots, k^2 + (a-1)k + b, \dots, n^2 + (a-1)n + b)$$

Q10. Appelons A l'ensemble des racines de (1) appartenant à $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$A = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, k^2 + (a-1)k + b = 0\}.$$

Comme la matrice de φ_n dans la base canonique \mathcal{B}_c est diagonale, de coefficients diagonaux, donc de valeurs propres, les $k^2 + (a-1)k + b$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le noyau de φ_n , alias le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, est :

$$\ker \varphi_n = \text{Vect}(X^k, k \in A).$$

Si $A = \{m_1, m_2\}$, alors :

$$\ker \varphi_n = \text{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$$

Q11. Avec les mêmes notations, si $A = \{m\}$, alors :

$$\ker \varphi_n = \text{Vect}(X^m)$$

Q12. Remarquons déjà que :

$$\ker \varphi_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi_n(P) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P \in \ker \varphi\}.$$

Soit $\ker \varphi_n = \mathbb{R}_n[X] \cap \ker \varphi$ et comme $\mathbb{R}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\ker \varphi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker \varphi_n.$$

L'équation (1) est une équation du second degré, donc admet au plus deux solutions réelles.

- Si (1) n'admet aucune solution dans \mathbb{N} , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ker \varphi_n = \{0\}$ et donc $\ker \varphi = \{0\}$.
- Si (1) admet une unique solution m dans \mathbb{N} , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ker \varphi_n = \{0\}$ quand $n < m$ et $\ker \varphi_n = \text{Vect}(X^m)$ quand $n \geq m$ donc $\ker \varphi = \text{Vect}(X^m)$.
- Si (1) admet deux solutions m_1 et m_2 dans \mathbb{N} avec $m_1 < m_2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ker \varphi_n = \{0\}$ quand $n < m_1$ et $\ker \varphi_n = \text{Vect}(X^{m_1})$ quand $m_1 \leq n < m_2$ et $\ker \varphi_n = \text{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$ quand $n \geq m_2$, donc $\ker \varphi = \text{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$.

Ainsi, $\ker \varphi$ est de dimension finie avec :

- Si $\{k \in \mathbb{N}, k^2 + (a-1)k + b = 0\} = \emptyset$, $\ker \varphi = \{0\}$ et $\dim \ker \varphi = 0$.
- Si $\{k \in \mathbb{N}, k^2 + (a-1)k + b = 0\} = \{m\}$, $\ker \varphi = \text{Vect}(X^m)$ et $\dim \ker \varphi = 1$.
- Si $\{k \in \mathbb{N}, k^2 + (a-1)k + b = 0\} = \{m_1, m_2\}$, $\ker \varphi_n = \text{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$ et $\dim \ker \varphi = 2$.