Corrigés des TD du chapitre 11

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, $t^n \in [0,1]$ et la fonction $f_n : t \mapsto f(t^n)$ est définie sur $[0,1]$.

De plus :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$ comme composée de fonctions continues (donc I_n est bien définie) ;
- pour tout $t \in [0,1]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} t^n = 0$, et par continuité de *f* en 0, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(t^n) = f(0)$;
- *f* est continue sur le segment $[0,1]$, donc est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \leq M$; alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, $|f_n(t)| = |f(t^n)| \leq M$.

Ainsi, :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \left[\lim_{n \to +\infty} f_n(t)\right] dt = \int_0^1 f(0)dt .$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = f(0)}$$

Exercice 2

La série $\sum |a_n|$ converge (donc $\sum a_n$ aussi et $a_n \to 0$) et $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

Comme $a_n \to 0$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{a_n}{n!} x^n\right| = \dfrac{|a_n|}{n!} |x|^n \leq M \dfrac{|x|^n}{n!}$ et $M \dfrac{|x|^n}{n!} \to 0$, donc $\left(\dfrac{a_n}{n!} x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$ est infini, autrement dit :

$$\boxed{S \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

On a :

$$I = \int_0^{+\infty} S(x) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n e^{-x} \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

avec $f_n(x) = \dfrac{a_n}{n!} x^n e^{-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ et donc f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ (produit).

De plus, on a $x^n e^{-x} \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{-x/2})$ et la fonction $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Alors, $x \mapsto x^n e^{-x}$ et donc f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $X \in \mathbb{R}_+$, on a par IPP :

$$\int_0^X x^{n+1}e^{-x}dx = \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^X - \int_0^X \left(-(n+1)x^n e^{-x}\right)dx = -X^{n+1}e^{-X} + (n+1)\int_0^X x^n e^{-x}dx.$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx = (n+1)\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx.$$

Comme $x \mapsto x^n e^{-x}$ est positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+$, on a $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx > 0$ et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx} = n+1.$$

Avec un produit télescopique, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = n! \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \frac{a_n}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = a_n.$$

Ainsi :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
- la série $\sum f_n$ converge simplement vers $x \mapsto S(x)e^{-x}$, qui est continue (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$ (car produit d'une somme d'une série entière et d'une fonction exponentielle) ;
- $\sum \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum |a_n|$ converge.

Donc :

$$x \mapsto S(x)e^{-x} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \int_0^{+\infty} S(x)e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Ceci revient à dire que :

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} S(x)e^{-x}dx \text{ converge et vaut } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.}$$

Exercice 3

1) a. L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}dt$ est impropre en 0 et $+\infty$. Mais :

- $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$ donc $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ se prolonge par continuité en 0 ;
- $\frac{t}{e^t - 1} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(e^{-t/2}\right)$ et et la fonction $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}dt$ converge, autrement dit :

$$\boxed{I \text{ est bien définie.}}$$

b. Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $e^{-t}\in\,]0,1[$, donc la série géométrique $\sum(e^{-t})^n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(n+1)t}=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t})^n=\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}=\frac{1}{e^t-1}.$$

D'où, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}te^{-(n+1)t}}$$

c. En intégrant par parties, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $X\in\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\int_0^X te^{-(n+1)t}dt&=\left[-\frac{1}{n+1}te^{-(n+1)t}\right]_0^X+\frac{1}{n+1}\int_0^X e^{-(n+1)t}dt\\&=\left[-\frac{1}{n+1}te^{-(n+1)t}\right]_0^X+\frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}\right]_0^X\\&=-\left(\frac{1}{n+1}X+\frac{1}{(n+1)^2}\right)e^{-(n+1)X}+\frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Et en faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty}te^{-(n+1)t}dt=\frac{1}{(n+1)^2}}$$

Alors, si on note $f_n:t\mapsto te^{-(n+1)t}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
- $\sum f_n$ converge simplement vers $t\mapsto\dfrac{t}{e^t-1}$, qui, prolongée par continuité en 0, est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- $\sum\int_0^{+\infty}|f_n|=\sum\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\sum\dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge.

Donc :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\frac{\pi^2}{6}}$$

2) a. Posons $f(x,t)=\dfrac{t^x-1}{\ln t}=\dfrac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}$ pour $(x,t)\in\,]-1,+\infty[\times]0,1[$. On a pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$:

$$\lim_{t\to0}f(x,t)=\left\{\begin{array}{ll}\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{1}{t^{-x}\ln t} & \text{quand } x<0\\ \displaystyle\lim_{t\to0}0 & \text{quand } x=0\\ \displaystyle\lim_{t\to0}\frac{-1}{\ln t} & \text{quand } x>0\end{array}\right\}=0\quad\text{et}\quad\lim_{t\to1}f(x,t)=x\lim_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}=x.$$

Donc, $t \mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 et 1. Alors :

- pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,1[$;
- pour tout $t \in]0,1[$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{x\ln t} = t^x$;
- pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{x\ln t}$ est continue sur $]0,1[$;

Enfin, pour tout $a \in]-1,+\infty[$ et pour tout $x \in [a,+\infty[$, on a pour tout $t \in]0,1[$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{x\ln t} \le e^{a\ln t} = t^a .$$

Et $t \mapsto t^a$ positive, continue et intégrable sur $]0,1[$ (avec $\int_0^1 t^a dt = \dfrac{1}{a+1}$).

Alors :

$$J : x \mapsto \int_0^1 f(x,t)dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a,+\infty[\text{ avec } J'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}.$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in]-1,+\infty[$:

$$\boxed{J \text{ est définie et de classe } C^1 \text{ sur }]-1,+\infty[\text{ avec pour tout } x \in]-1,+\infty[,\ J'(x) = \frac{1}{x+1}.}$$

b. Avec $J'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ sur $]-1,+\infty[$, on a immédiatement pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$J(x) = \ln(x+1) + k$$

où k est une constante.

On a vu dans l'exercice 2)k. du TD 9 que $\int_0^1 \dfrac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2$, soit $J(1) = \ln 2$.

Or, $J(1) = \ln(1+1) + k = \ln 2 + k$ donc $k = 0$ et finalement pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$\boxed{J(x) = \ln(x+1)}$$

Exercice 4

Posons $f(x,t) = \dfrac{1}{1+t^2+e^{-xt}}$.

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Quel que soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on a $0 \le f(x,t) \le \dfrac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$, on a $e^{-bt}\leq e^{-at}$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, avec égalité en $t=0$ uniquement, donc $f(a,t)\leq f(b,t)$ avec égalité en $t=0$ uniquement et ainsi :

$$F(a)<F(b).$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

On a :

$$F(0)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty}.$$

Soit :

$$\boxed{F(0)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{R}_+$, on a $0<f(x,t)\leq\dfrac{1}{e^{-xt}}=e^{xt}$, donc :

$$0\leq F(x)\leq\int_0^{+\infty}e^{xt}dt=\left[\frac{1}{x}e^{xt}\right]_0^{+\infty}=-\frac{1}{x}.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}F(x)=0}$$

Enfin, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}-F(x)\right|=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{(1+t^2)(1+t^2+e^{-xt})}dt\leq\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\left[\frac{1}{-x}e^{-xt}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{x}$$

D'après le théorème des gendarmes, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\left[\arctan t\right]_0^{+\infty}$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 5

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $t\mapsto\dfrac{\cos t}{t+x}$ est définie et continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc *f* est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

- pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto\dfrac{\cos t}{t+x}$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;
- pour tout $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $x\mapsto\dfrac{\cos t}{t+x}$ est continue sur $[a,+\infty[$;

- pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $0\leq\frac{\cos t}{t+x}\leq\frac{\cos t}{t+a}$ et $t\mapsto\frac{\cos t}{t+a}$ est continue et intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc, $f(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt$ est continue sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{f \text{ est bien définie et continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$g(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{x}dt=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\cos t}{t+x}-\frac{\cos t}{x}\right)dt=\int_0^{\pi/2}\frac{-t\cos t}{x(t+x)}dt.$$

Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$|g(x)|=\int_0^{\pi/2}\frac{t\cos t}{x(t+x)}dt\leq\int_0^{\pi/2}\frac{t\cos t}{x^2}dt=\frac{1}{x^2}\int_0^{\pi/2}t\cos t\,dt=\frac{1}{x^2}\frac{\pi-2}{2}.$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{g(x)\underset{x\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

On a :

$$g(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{x}dt=f(x)-\frac{1}{x}\int_0^{\pi/2}\cos t dt=f(x)-\frac{1}{x}.$$

Or, $g(x)\underset{x\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ implique $g(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x}\right)$, donc :

$$g(x)=f(x)-\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ce qui implique :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}}$$

3) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$h(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t+x}dt=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t-1}{t+x}dt.$$

Or, $-\frac{1}{2}t^2\leq\cos t-1\leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, d'où pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$|h(x)|=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos t}{t+x}dt\leq\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{t}dt\leq\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}t\,dt=\frac{\pi^2}{16}.$$

Or, $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t+x}dt=\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\ln x$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$|h(x)|=\left|f(x)-\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\ln x\right|\leq\frac{\pi^2}{16}.$$

Alors, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\left|\frac{f(x)}{-\ln x}-1\right| = \frac{1}{-\ln x}|f(x)+\ln x| \le \frac{1}{-\ln x}\left[\left|f(x)+\ln x-\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right|+\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right] \le \frac{1}{-\ln x}\left[\frac{\pi^2}{16}+\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right].$$

Et comme $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{-\ln x}\left[\frac{\pi^2}{16}+\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]\right)=0$, on obtient par comparaison, $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{-\ln x}=1$, soit :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x}$$

Exercice 6

1) Soit $f(x,t)=\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ et :

- pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue, donc intégrable, sur le segment $[0,1]$;
- pour tout $t\in[0,1]$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue sur $[0,1]$;
- pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\le\sqrt{\dfrac{2}{e(1+t^2)}}$ (il suffit d'étudier $x\mapsto 2xe^{-x^2(1+t^2)}$ sur $\mathbb{R}$) et la fonction $t\mapsto\sqrt{\dfrac{2}{e(1+t^2)}}$ est continue, donc intégrable, sur le segment $[0,1]$.

Alors, la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x\mapsto -2\int_0^1 xe^{-x^2(1+t^2)}dt$.

La fonction $x\mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $g: x\mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme $G=g^2$, G est aussi de de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $G'=2g'g$.

Finalement :

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x\in\mathbb{R},\ F'(x)=-2\int_0^1 xe^{-x^2(1+t^2)}dt \text{ et } G'(x)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt.}$$

2) Comme F et G le sont, $F+G$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$F'(x)+G'(x)=-2\int_0^1 xe^{-x^2(1+t^2)}dt+2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt = 2e^{-x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt-\int_0^1 xe^{-(xt)^2}dt\right).$$

En posant $u=xt$, on obtient $\int_0^1 xe^{-(xt)^2}dt=\int_0^x e^{-u^2}du$ et ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(F+G)'(x)=0$, donc ;

$$\boxed{F+G \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$$

3) Pour tout pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$, on a $e^{-x^2(1+t^2)}=e^{-x^2}e^{-x^2t^2}\le e^{-x^2}$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$|F(x)|=F(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt\le e^{-x^2}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}e^{-x^2}.$$

D’après le théorème des gendarmes, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x)=0}$$

Remarquons préalablement que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est impropre en $+\infty$, mais $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} G(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2=\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2.$$

Comme $F+G$ est constante sur $\mathbb{R}$, on a, avec $\lim_{x\to+\infty} F(x)=0=G(0)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[F(x)+G(x)\right]=F(0)+G(0) \quad\Leftrightarrow\quad \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2=F(0)=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Et comme $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt>0$, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

4) Comme $t\mapsto e^{-t^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, donc :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}}$$

Remarquons préalablement que $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ est impropre en 0 et $+\infty$, mais :

- $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ converge ;
- $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge.

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \text{ converge.}$$

En posant $u=\sqrt{t}$ dans $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du.$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\pi}}$$

Exercice 7

1) Pour $f \in E$, posons $h(x,t) = e^{-xt} f(t)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $f \in E$, la fonction $t \mapsto h(x,t) = e^{-xt} f(t)$ est continue $\mathbb{R}_+$. De plus, $|f(t)| = \underset{t\to+\infty}{O}(1)$, donc $e^{-xt}|f(t)| = \underset{t\to+\infty}{O}(e^{-xt})$. Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ converge (car $x>0$), ce qui permet de conclure que :

$$\mathscr{L}(f) \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t) = e^{-xt} f(t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = (-t)^k e^{-xt} f(t) \;;$$
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = (-t)^k e^{-xt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
de plus , $\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| = \underset{t\to+\infty}{O}(t^k e^{-xt})$ et $t^k e^{-xt} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $\int_0^{+\infty} t^k e^{-xt}\,dt$ converge et ainsi, $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times \mathbb{R}_+$, on a $\left| t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \le t^k e^{-at} f(t)$ et on vient de voir que $t \mapsto t^k e^{-at} f(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors, $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$ est de classe C^∞ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, soit pour tout $f \in E$:

$$\boxed{\mathscr{L}(f) \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

De plus, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{L}(f)^{(k)} : x \mapsto \int_0^{+\infty} (-t)^k e^{-xt} f(t)\,dt$.

2) Soit $f \in E$. On veut $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$.

Comme *f* est bornée sur $\mathbb{R}_+$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)| \le M$ et :

$$|\mathscr{L}(f)(x)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt\right| \le \int_0^{+\infty} \left|e^{-xt} f(t)\right| dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,|f(t)|\,dt \le M\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{M}{x}.$$

Ceci donne immédiatement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathscr{L}(f)(x) = 0}$$

3) Soit $g : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de telles fonctions et, comme $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, elle se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

La fonction ainsi prolongée, renommée g, est continue sur le segment $[0,1]$, donc y est bornée et pour tout $t\in[1,+\infty[$, on a $|g(t)|=\dfrac{|\sin t|}{t}\le\dfrac{1}{t}\le 1$, donc g est aussi bornée sur $[1,+\infty[$.

Ainsi, g est bornée sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La fonction } t\mapsto\frac{\sin t}{t} \text{ se prolonge par continuité en une fonction } g \text{ de } E.}$$

D'après la question 1, on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{L}(g)'(x)=\int_0^{+\infty}(-t)e^{-xt}g(t)\,dt$, soit :

$$\mathscr{L}(g)'(x)=\int_0^{+\infty}(-t)e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt=-\int_0^{+\infty}e^{-xt}\sin t\,dt=\mathrm{Im}\left(-\int_0^{+\infty}e^{(-x+i)t}dt\right)$$
$$=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{-1}{-x+i}e^{(-x+i)t}\right]_0^{+\infty}\right)=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{x+i}{x^2+1}e^{-xt}e^{it}\right]_0^{+\infty}\right)=-\,\mathrm{Im}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right)$$

Soit pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\mathscr{L}(g)'(x)=-\frac{1}{x^2+1}}$$

On a alors pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{L}(g)(x)=-\arctan x+C$ où C est une constante d'intégration.

Or, d'après la question 2, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathscr{L}(g)(x)=0$, soit $-\dfrac{\pi}{2}+C=0$ et donc $C=\dfrac{\pi}{2}$.

Finalement, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\mathscr{L}(g)(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Exercice 8

1) Posons $f(s,x)=e^{-x}x^{s-1}$ pour tout $(s,x)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ fixé, la fonction $s\mapsto f(s,x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial s^k}(s,x)=(\ln x)^k e^{-x}x^{s-1}.$$

- Pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $k\in\mathbb{N}$, $x\mapsto\dfrac{\partial^k f}{\partial s^k}(s,x)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, tous $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $a\le 1\le b$ et tout $(s,x)\in[a,b]\times\mathbb{R}_+^*$:

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial s^k}(s,x)\right|=|\ln x|^k e^{-x}x^{s-1}\le\varphi(x)=\begin{cases}|\ln x|^k\,e^{-x}x^{a-1} & \text{pour } x\le 1\\ |\ln x|^k\,e^{-x}x^{b-1} & \text{pour } x\ge 1\end{cases}$$

La fonction φ est continue (même en 1 où elle vaut 0), donc continue par morceaux, et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

- pour $x \le 1$, $\varphi(x) = |\ln x|^k e^{-x} x^{a-1} = |\ln x|^k e^{-x} x^{\frac{a}{2}} x^{\frac{a}{2}-1} = \underset{x\to 0}{o}(x^{\frac{a}{2}-1})$ (car $\lim\limits_{x\to 0} |\ln x|^k e^{-x} x^{\frac{a}{2}} = 0$ par croissances comparées), et l'intégrale de Riemann $\int_0 x^{\frac{a}{2}-1} dx$ converge (car $\dfrac{a}{2} - 1 > -1$), donc $\int_0 \varphi(x)\, dx$ converge ;
- pour $x \ge 1$, $\varphi(x) = |\ln x|^k e^{-x} x^{b-1} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} |\ln x|^k e^{-x} x^{b+1} = 0$ par croissances comparées), et l'intégrale de Riemann $\int^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ converge, donc $\int^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ converge

Ainsi, la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Tout ceci permet de conclure que Γ est de classe C^∞ sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ (avec $a \le 1 \le b$), donc :

$$\boxed{\Gamma \text{ est définie et de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

De plus, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^k e^{-x} x^{s-1} dx$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$.

2) Pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, on a en intégrant par parties (on vérifie que toutes les intégrales convergent) :

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx = \left[-e^{-x} x^s\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s x^{s-1} e^{-x} dx = s\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx .$$

Soit pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)}$$

3) On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}$, donc :

$$\boxed{\Gamma(1) = 1}$$

On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$. Une récurrence simple permet de prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(m) \ne 0$ et on peut alors écrire pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \ge 2$:

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m)} = m \quad\Rightarrow\quad \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} = \prod_{k=1}^{m-1} k \quad\Rightarrow\quad \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(1)} = (m-1)! \quad\Rightarrow\quad \Gamma(m) = (m-1)!$$

La relation reste valable pour $m = 1$ et ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\Gamma(m) = (m-1)!}$$

On a $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ et d'après l'exercice 6 :

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

On a pour tout $m\in\mathbb{N}$, on a $\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+1\right)=\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)$.

Avec $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\neq 0$, une récurrence simple permet de prouver que pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\neq 0$ et on peut alors écrire pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}=m+\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\prod_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\prod_{k=0}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

Et :

$$\prod_{k=0}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^m}\prod_{k=0}^{m-1}(2k+1)=\frac{1}{2^m}1\times3\times\ldots\times(2m-3)\times(2m-1)=\frac{1}{2^m}\frac{(2m)!}{2\times4\times\ldots\times(2m-2)\times(2m)}=\frac{(2m)!}{2^{2m}m!}.$$

Ainsi, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\prod_{k=0}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\frac{(2m)!}{2^{2m}m!}.$$

La relation reste valable pour $m=0$ et ainsi, pour tout $m\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\frac{(2m)!}{2^{2m}m!}}$$

4) En prenant $s=1$ dans la relation de la question 2, on obtient $\Gamma(2)=\Gamma(1)$.

Or, on a vu que Γ est dérivable sur $[1,2]$, donc on peut utiliser le théorème de Rolle pour conclure que :

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha\in]1,2[\text{ tel que } \Gamma'(\alpha)=0.}$$

On a pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma''(s)=\int_0^{+\infty}(\ln x)^2e^{-x}x^{s-1}dx\geq 0$, donc :

$$\boxed{\Gamma' \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Comme Γ' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en $\alpha\in]1,2[$, on a $\Gamma'(s)\leq 0$ sur $]0,\alpha]$ et $\Gamma'(s)\geq 0$ sur $[\alpha,+\infty[$.

Alors :

$$\boxed{\Gamma \text{ est décroissante sur }]0,\alpha] \text{ et croissante sur } [\alpha,+\infty[.}$$

Pour construire le tableau de variation complet de Γ, il faut déterminer ses limites en 0 et $+\infty$.

On a vu que pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(m)=(m-1)!$ donc $\lim\limits_{m\to+\infty}\Gamma(m)=+\infty$ et la fonction Γ n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$. Comme elle croissante sur $[\alpha,+\infty[$, on a :

$$\boxed{\lim_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty}$$

On a vu que pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Or, Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en 1, d'où :

$$\lim_{s \to 0} \Gamma(s+1) = \lim_{x \to 1} \Gamma(x) = \Gamma(1) = 1.$$

Ainsi, $\lim_{s \to 0} s\Gamma(s) = 1$, donc :

$$\boxed{\Gamma(s) \underset{s \to 0}{\sim} \frac{1}{s} \text{ et } \lim_{s \to 0} \Gamma(s) = +\infty}$$

On obtient le tableau :

s	0		α		$+\infty$
Γ	$+\infty$	$\searrow$	$\Gamma(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5) On a :

$$\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \le e^{-x} \iff 1 - \frac{x}{m} \le e^{-\frac{x}{m}} \iff g\left(\frac{x}{m}\right) \ge 0$$

avec $g(t) = e^{-t} + t - 1$ et $x \in [0;m]$ pour $\frac{x}{m} \in [0;1]$.

La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = 1 - e^{-t}$. Pour tout $t \ge 0$, $g'(t) \ge 0$ donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = 0$, donc g est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, pour tout $x \in [0;m]$, on a $g\left(\frac{x}{m}\right) \ge 0$ et donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;m]$:

$$\boxed{\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \le e^{-x}}$$

On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;m]$:

$$\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = \exp\left[m \ln\left(1 - \frac{x}{m}\right)\right] = \exp\left[m\left(-\frac{x}{m} + \underset{m \to +\infty}{o}\left(\frac{x}{m}\right)\right)\right] = e^{-x + \underset{m \to +\infty}{o}(1)} = e^{-x} + \underset{m \to +\infty}{o}(1).$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{m \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}}$$

6) Pour tout réel $s > 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, posons $t = \frac{x}{m}$:

$$\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1} dx = \int_0^1 (1-t)^m (mt)^{s-1} m dt = m^s \int_0^1 (1-t)^m t^{s-1} dt.$$

En intégrant par parties, on a :

$$\int_0^1 (1-t)^m t^{s-1} dt = \left[(1-t)^m \frac{t^s}{s}\right]_0^1 - \int_0^1 \left[-m(1-t)^{m-1}\right] \frac{t^s}{s} dt = \frac{m}{s} \int_0^1 (1-t)^{m-1} t^s dt.$$

En recommençant plusieurs fois, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)^m t^{s-1}dt &= \frac{m}{s}\int_0^1 (1-t)^{m-1}x^s dx\\ &= \frac{m}{s}\frac{m-1}{s+1}\int_0^1 (1-t)^{m-2}t^{s+1}dt\\ &= \frac{m}{s}\frac{m-1}{s+1}\frac{m-2}{s+2}\int_0^1 (1-t)^{m-3}t^{s+2}dt\\ &\vdots\\ &= \frac{m}{s}\frac{m-1}{s+1}\frac{m-2}{s+2}\dots\frac{m-(m-1)}{s+m-1}\int_0^1 t^{s+m-1}dt\\ &= \frac{m}{s}\frac{m-1}{s+1}\frac{m-2}{s+2}\dots\frac{m-(m-1)}{s+m-1}\frac{1}{s+m} = \frac{m!}{s(s+1)(s+2)\dots(s+m-1)(s+m)}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $s>0$ et tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\int_0^m \left(1-\frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}dx = \frac{m^s m!}{s(s+1)(s+2)\dots(s+m-1)(s+m)}}$$

7) Soit un réel $s>0$ fixé. Posons pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\gamma(x)=e^{-x}x^{s-1} \quad f_m(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{m}\right)^m x^{s-1} & \text{pour } x\in[0;m]\\ 0 & \text{pour } x\in[m;+\infty[\end{cases}$$

- Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, f_m est continue sur $\mathbb{R}_+$ (même en *m*, où elle vaut 0).
- D'après la question 5, on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x)=\gamma(x)$ avec γ continue sur $\mathbb{R}_+$.
- A nouveau d'après la question 5, on a pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0;m]$, $|f_m(x)| = f_m(x)\le\gamma(x)$.

  Ceci reste vrai pour $x\in[m;+\infty[$, donc pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$:

  $$|f_m(x)|\le\gamma(x).$$

  Et γ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (d'intégrale $\Gamma(s)$).

Alors, on a :

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\gamma(x)\,dx = \Gamma(s).$$

Or, d'après la question précédente, on a pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx = \int_0^m\left(1-\frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}dx = \frac{m!\,m^s}{s(s+1)\dots(s+m)}.$$

Ainsi, pour tout réel $s>0$:

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty}\frac{m!\,m^s}{s(s+1)\dots(s+m)}=\Gamma(s)}$$

8) On pose pour $x\in[1;+\infty[$:

$$\varphi(x)=\int_x^{x+1}\ln\big(\Gamma(t)\big)\,dt=\int_1^{x+1}\ln\big(\Gamma(t)\big)\,dt-\int_1^{x}\ln\big(\Gamma(t)\big)\,dt\ .$$

La fonction φ est dérivable sur $[1;+\infty[$ en tant que différence de telles fonctions et pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$\varphi'(x)=\ln\big(\Gamma(x+1)\big)-\ln\big(\Gamma(x)\big)=\ln\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right).$$

Or, d'après la question 2, on a $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, donc pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$\varphi'(x)=\ln x\,.$$

Alors, $\varphi'(x)\geq 0$ sur $[1;+\infty[$ avec $\varphi'(x)=0$ en 1 uniquement, donc φ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

De plus, avec $\varphi'(x)=\ln x$, il existe une constante C telle que pour tout $x\in[1;+\infty[$, $\varphi(x)=x\ln x-x+C$.

On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

D'après la question 4, on a le tableau :

s	1		α		2		$+\infty$
Γ	1		$\Gamma(\alpha)$		1		$+\infty$

D'où le tableau de signes :

s	1		2		$+\infty$
$\ln\big(\Gamma(s)\big)$	0	$-$	0	$+$	

On a alors $\varphi(1)=\int_1^2\ln\big(\Gamma(t)\big)\,dt<0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geq 2$, $\varphi(n)=\int_n^{n+1}\ln\big(\Gamma(t)\big)\,dt>0$.

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\varphi(n)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, strictement positive à partir du rang 2 et de limite infinie.

Ceci permet de conclure que la série $\sum\frac{(-1)^n}{u_n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées à partir du rang 2 et donc que :

$$\boxed{\text{La série } \sum\frac{(-1)^n}{u_n} \text{ converge.}}$$

Exercice 9

Soit la fonction $f:(x,t)\mapsto f(x,t)=\dfrac{1}{1+t^2}\arctan\left(\dfrac{x}{t}\right)$, définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue (comme produit de telles fonctions) et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$, $|f(x,t)|\leq\dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{\pi}{2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$).
- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ (car arctan l'est), avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{t}{t^2+x^2}$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (c'est une fonction rationnelle).

- Pour tout réel $a>0$ et tout $(x,t)\in[a;+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\leq\frac{1}{2a}\frac{1}{1+t^2}.$$

Et, $t\mapsto\dfrac{1}{2a}\dfrac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, la fonction $F:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\arctan\left(\frac{x}{t}\right)dt$ est C^1 sur $[a;+\infty[$, de dérivée $F':x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\frac{t}{t^2+x^2}dt$.

Ceci étant vrai pour tout réel $a>0$, F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\frac{t}{t^2+x^2}dt.$$

De plus, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$:

$$(x^2-1)\frac{1}{1+t^2}\frac{t}{t^2+x^2}=\frac{t}{1+t^2}-\frac{t}{t^2+x^2}.$$

Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$(x^2-1)F'(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{t}{t^2+x^2}\right)dt=\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{t^2+x^2}\right)\right]_0^{+\infty}=\ln x.$$

Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, $F'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ et comme $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ et F' continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (donc en 1), on a pour tous $\varepsilon,x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$F(x)=F(\varepsilon)+\int_\varepsilon^x\frac{\ln t}{t^2-1}dt\qquad\textbf{(1)}.$$

Or, on a vu que :

- pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$, $|f(x,t)|\leq\dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{\pi}{2}$, avec $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{\pi}{2}$ positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to0}F(\varepsilon)=F(0)=0$.

Par ailleurs, $\dfrac{\ln t}{t^2-1}\underset{\varepsilon\to0}{\sim}-\ln t$ et $t\mapsto\ln t$ est intégrable en 0, donc $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^x\dfrac{\ln t}{t^2-1}dt=\int_0^x\dfrac{\ln t}{t^2-1}dt$ et en faisant tendre e vers 0 dans la relation **(1)**, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\arctan\left(\frac{x}{t}\right)dt=\int_0^x\frac{\ln t}{1-t^2}dt}$$

Exercice 10

Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0)>0$, alors $f(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=+\infty$, alors il existe $a\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x\in[a;+\infty[$, $\phi(x)>0$.

1) Soit un réel $t \geq t_0$. Pour tout $x \in [a;+\infty[$, on a $\phi(x) > 0$ et $f(x) > 0$, donc :

$$0 < e^{-t\phi(x)} f(x) \leq e^{-t_0\phi(x)} f(x).$$

Comme $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t_0\phi(x)} f(x)dx$ existe, $\int_a^{+\infty} e^{-t_0\phi(x)} f(x)dx$ converge, donc par comparaison , $\int_a^{+\infty} e^{-t\phi(x)} f(x)dx$ converge aussi et, comme $\int_0^a e^{-t\phi(x)} f(x)dx$ est définie, $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t\phi(x)} f(x)dx$ existe. Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est bien définie sur } [t_0, +\infty[.}$$

Si $t_0 = 0$, alors F est définie sur $[0,+\infty[$, donc sur $[t_1,+\infty[$ pour tout $t_1 \in \mathbb{R}_+$ (qui peut le plus, peut le moins…). Ainsi :

$$\boxed{\text{On peut se contenter d'étudier le cas où } t_0 = 0.}$$

2) On prend ici $\phi = id$ (qui vérifie bien les hypothèses sur ϕ). On a donc pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx.$$

a. Soit un réel $\alpha > 0$.

Soit $t \in [1,+\infty[$. En effectuant le changement de variable $u = tx$, on obtient :

$$\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx = \int_{t\alpha}^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{t}\right)\frac{du}{t} = \frac{1}{t}\int_{t\alpha}^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{t}\right)du.$$

Comme $t \in [1,+\infty[$, $\frac{u}{t} \leq u$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ et, comme *f* est strictement croissante, on a $f\left(\frac{u}{t}\right) \leq f(u)$.

Comme $F(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)dx$ est défini, $\int_{t\alpha}^{+\infty} e^{-u} f(u)du$ converge et on a $\int_{t\alpha}^{+\infty} e^{-u} f(u)du \leq \int_0^{+\infty} e^{-u} f(u)du$ car *f* est positive sur $\mathbb{R}_+$. On peut alors écrire :

$$0 \leq \int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx \leq \frac{1}{t}\int_{t\alpha}^{+\infty} e^{-u} f(u)du \leq \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-u} f(u)du.$$

Et comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-u} f(u)du = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx = 0}$$

En reprenant l'expression établie ci-dessus, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$t\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx = \int_{t\alpha}^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{t}\right)du.$$

Soit $A > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $t\alpha \geq A$, soit $t \geq \frac{A}{\alpha}$, donc pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $f\left(\frac{u}{t}\right) \leq f\left(\frac{\alpha u}{A}\right)$.

Remarquons que $F(0)=\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $F\left(\frac{\alpha}{A}\right)=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{A}x} f(x)dx$ existent donc les intégrales $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx$ et $\int^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{\alpha u}{A}\right)du=\int^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{A}x} f(x)dx$ convergent. On peut alors écrire comme plus haut :

$$0\leq t\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx\leq \int_{t\alpha}^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{\alpha u}{A}\right)du\leq \int_A^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{\alpha u}{A}\right)du.$$

Avec $v=\frac{\alpha u}{A}$, on a :

$$\int_A^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{\alpha u}{A}\right)du=\int_\alpha^{+\infty} e^{-A\frac{v}{\alpha}} f(v)\frac{A}{\alpha}dv.$$

Et, pour tout $v\in[\alpha,+\infty[$, $e^{-A\frac{v}{\alpha}}\leq e^{-A}$, donc :

$$\int_\alpha^{+\infty} e^{-A\frac{v}{\alpha}} f(v)du\leq \int_\alpha^{+\infty} e^{-A} f(v)du=e^{-A}\int_\alpha^{+\infty} f(v)du.$$

Alors, pour tout réel $A>0$ et tout réel $t\geq\frac{A}{\alpha}$, on a :

$$0\leq t\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx\leq Ae^{-A}\frac{1}{\alpha}\int_\alpha^{+\infty} f(v)du.$$

Enfin, par croissances comparées, $\lim\limits_{A\to+\infty} kAe^{-A}=0$ (avec $k=\frac{1}{\alpha}\int_\alpha^{+\infty} f(v)du>0$), donc pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $T>0$ tel que pour tout $A\geq\alpha T$, $kAe^{-A}\leq\varepsilon$.

Finalement, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $T>0$ tel que pour tout réel $t\geq T$, $0\leq t\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx\leq\varepsilon$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} t\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx=0}$$

b. Toujours avec la croissance de *f*, on a, pour tout réel $\alpha>0$ et tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$t\int_0^\alpha e^{-tx} f(0)dx\leq t\int_0^\alpha e^{-tx} f(x)dx\leq t\int_0^\alpha e^{-tx} f(\alpha)dx.$$

Et $\int_0^\alpha e^{-tx}dx=\left[-\frac{1}{t}e^{-tx}\right]_0^\alpha=\frac{1-e^{-t\alpha}}{t}$, donc, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(0)\left(1-e^{-t\alpha}\right)\leq t\int_0^\alpha e^{-tx} f(x)dx\leq f(\alpha)\left(1-e^{-t\alpha}\right)\leq f(\alpha).$$

Soit alors $\varepsilon>0$.

Comme *f* est continue en 0, il existe un réel $\alpha>0$ tel que $f(\alpha)\leq f(0)+\varepsilon$.

Alors, avec $F(t)=\int_0^\alpha e^{-tx} f(x)dx+\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx$, on a, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$t\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx-f(0)e^{-t\alpha}\leq tF(t)-f(0)\leq\varepsilon+t\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx.$$

Et comme $\lim\limits_{t\to+\infty} t\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty} f(0)e^{-t\alpha} = 0$, il existe $B\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout réel $t\geq B$:

$$-2\varepsilon \leq t\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx - f(0)e^{-t\alpha} \leq t\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $B\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout réel $t\geq B$:

$$-2\varepsilon \leq tF(t) - f(0) \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{t\to+\infty} tF(t) = f(0)\neq 0$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t}}$$

3) La fonction ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante (car $\phi'(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$) de $\phi(0)=0$ à $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=+\infty$. Elle réalise donc une bijection de de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On peut donc effectuer le changement de variable $u=\phi(x)$ dans $F(t)=\int_0^{+\infty} e^{-t\phi(x)} f(x)dx$, qui donne :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tu} f\left(\phi^{-1}(u)\right)\frac{du}{\phi'\left(\phi^{-1}(u)\right)} = \int_0^{+\infty} e^{-tu} g(u)du$$

avec $g(u) = \dfrac{f\left(\phi^{-1}(u)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}(u)\right)}$.

Comme ϕ' est décroissante et strictement positive, $\dfrac{1}{\phi'}$ est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Il en va de même pour *f*, donc pour $\dfrac{f}{\phi'}$. Enfin, comme ϕ est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, ϕ^{-1} l'est aussi et ainsi, est *g* est continue (en tant que quotient de telles fonctions), croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = \dfrac{f\left(\phi^{-1}(0)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}(0)\right)} = \dfrac{f(0)}{\phi'(0)} > 0$.

On peut donc utiliser le résultat de la question précédente : $F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{g(0)}{t}$ et avec $g(0)=\dfrac{f(0)}{\phi'(0)}$:

$$\boxed{F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t\,\phi'(0)}}$$