

Corrigés des TD du chapitre 13

Exercice 1

1) Chaque appel téléphonique est une expérience aléatoire ayant deux issues : on obtient le correspondant (probabilité p) ou pas (probabilité $1-p$). Cette expérience de Bernoulli est répétée n fois de manière indépendante : on a un schéma de Bernoulli. Le nombre X de succès, autrement dit le nombre de correspondants obtenus, suit donc une loi binomiale de paramètres n et p .

La variable X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2) a. Si l'évènement $(X=i)$ est réalisé, la secrétaire a joint i correspondants lors de la première vague d'appels. Elle va donc en rappeler $n-i$ lors de la seconde vague.

Comme X , la variable Y représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels suit une loi binomiale de paramètres $n-i$ et p , et donc pour tout $k \in 0, n-i$:

$$P_{(X=i)}(Y=k) = \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k}$$

b. La variable aléatoire $Z = X + Y$ représente le nombre total de correspondants obtenus après les deux séries d'appels. On a donc $Z(\Omega) = 0, n$ et, avec la loi des probabilités totales, on a pour tout $k \in 0, n$:

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \sum_{i=0}^k P(X=i)P_{(X=i)}(Z=k) = \sum_{i=0}^k P(X=i)P_{(X=i)}(Y=k-i) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-i-(k-i)} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} p^k (1-p)^{2n-k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(1 + \frac{1}{1-p}\right)^k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} (2-p)^k \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$P(Z=k) = \binom{n}{k} (2p-p^2)^k [1-(2p-p^2)]^{n-k}.$$

Et donc :

$Z = X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres n et $2p-p^2$.

Exercice 2

1) Remarquons que N est entier et Np aussi car c'est le nombre de boules blanches.

La variable X représente le nombre de boules blanches obtenues à l'issue d'un tirage donné, donc :

$$X(\Omega) = 0, Np.$$

Les tirages possibles sont équiprobables, donc pour tout $k \in 0, Np$:

$$P(X = k) = \frac{\text{Nombre de tirages contenant } k \text{ boules blanches}}{\text{Nombre total de tirages possibles}}.$$

Enfin, on choisit sans remise de n boules distinctes parmi les N de l'urne, donc le modèle est celui des combinaisons. Il y a $\binom{N}{n}$ tirages possibles et pour obtenir exactement k boules blanches (donc $n-k$ boules noires), il faut choisir ces k boules blanches parmi les Np dans l'urne $\binom{Np}{k}$ possibilités et pour chacune de ces possibilités, il y a $\binom{N(1-p)}{n-k}$ possibilités de choisir les $n-k$ boules noires parmi les $N - Np = N(1-p)$ de l'urne. Il y a donc $\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}$ tirages contenant k boules blanches et ainsi, pour tout $k \in 0, Np$:

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

On a $a! \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi a} \left(\frac{a}{e}\right)^a$, donc pour tout entier b fixé :

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi a} \left(\frac{a}{e}\right)^a}{b! \sqrt{2\pi(a-b)} \left(\frac{a-b}{e}\right)^{a-b}}.$$

Et :

$$\frac{\sqrt{2\pi a} \left(\frac{a}{e}\right)^a}{b! \sqrt{2\pi(a-b)} \left(\frac{a-b}{e}\right)^{a-b}} = \frac{e^{-b}}{b!} \sqrt{\frac{a}{a-b}} e^{-a \ln\left(1 - \frac{b}{a}\right)} (a-b)^b \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a^b}{b!}$$

Donc, à b fixé, $\binom{a}{b} \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a^b}{b!}$ et, à n, p et k fixés :

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{(Np)^k}{k!} \frac{N^{n-k} (1-p)^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{N^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ainsi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Donc :

Lorsque N tend vers l'infini, la loi hypergéométrique tend vers la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $1, n$ et $S = X + Y$.

On a $S(\Omega) = 2, 2n$ et, avec la loi des probabilités totales, on a pour tout $k \in 2, 2n$:

$$P(S = k) = \sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leq i, j \leq n}} P(X = i, Y = j).$$

Comme X et Y sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $1, n$, on a, pour tous $i, j \in 1, n$:

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j) = \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(S = k) &= \sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leq i, j \leq n}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \text{Card} \left\{ (i, j) \in 1, n^2, i + j = k \right\} = \frac{1}{n^2} \text{Card} \left\{ (i, k - i) \in 1, n^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Card} \left\{ i \in 1, n, 1 \leq k - i \leq n \right\} = \frac{1}{n^2} \text{Card} \left\{ i \in 1, n, k - n \leq i \leq k - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Card} \left[\max(1, k - n), \min(k - 1, n) \right] = \frac{\min(k - 1, n) - \max(1, k - n) + 1}{n^2} \end{aligned}$$

Or :

$$k - 1 \leq n \Leftrightarrow k - n \leq 1.$$

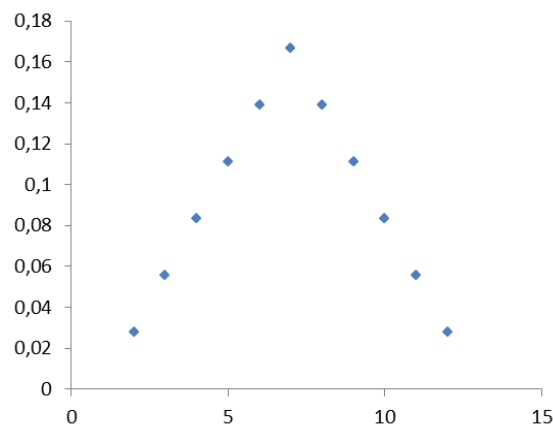
Donc :

$$\min(k - 1, n) = k - 1 \Leftrightarrow \max(1, k - n) = 1.$$

Et ainsi, on a :

$$P(S = k) = \begin{cases} \frac{k - 1}{n^2} & \text{quand } 2 \leq k \leq n + 1 \\ \frac{2n + 1 - k}{n^2} & \text{quand } n + 1 \leq k \leq 2n \end{cases}$$

Si on représente cette loi pour $n = 6$ (ce qui correspond à l'expérience : lancer de deux dés standards et non pipés, S est la somme des deux chiffres obtenus), on obtient :



Ceci illustre bien l'aspect « triangulaire » de la loi. Numériquement, ceci correspond à pour tout $k \in 2, 2n$:

$$P(S = 2n + 2 - k) = P(S = k).$$

Exercice 3

L'expression de la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $2, 2n$ est :

$$G_X(t) = \sum_{k=2}^{2n} P(X=k)t^k = \sum_{k=2}^{2n} \frac{1}{2n-2+1} t^k.$$

Soit :

$$G_X(t) = \frac{1}{2n-1} \sum_{k=2}^{2n} t^k$$

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $1, n$. On a alors :

$$G_{X_1+X_2} = G_{X_1} G_{X_2}$$

Comme X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité, on a $G_{X_1} = G_{X_2}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_{X_1+X_2}(t) = (G_{X_1}(t))^2 = \left(\sum_{k=1}^n P(X_1=k)t^k \right)^2.$$

Ceci permet de conclure que toutes les racines de $G_{X_1+X_2}$ sont au moins doubles.

Or, si $X_1 + X_2$ suit une loi uniforme sur $2, 2n$, on a $G_{X_1+X_2}(t) = \frac{1}{2n-1} \sum_{k=2}^{2n} t^k$, donc :

$$G_{X_1+X_2}(t) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{2n} t^k = 0 \Leftrightarrow t^2(t-1) \sum_{k=0}^{2n-2} t^k = 0 \text{ avec } t \neq 1 \Leftrightarrow t^2(t^{2n-1} - 1) = 0 \text{ avec } t \neq 1.$$

Comme $n \geq 2$, on a $2n-1 \geq 3$, donc $t^{2n-1} - 1$ admet au moins une racine et toutes ses racines sont simples (ce sont les racines $(2n-1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité). Ainsi, toutes les racines de $G_{X_1+X_2}$, hormis 0, sont simples. D'après ce qui précède, ceci est absurde et ainsi :

$$X_1 + X_2 \text{ ne peut suivre une loi uniforme sur } 2, 2n.$$

Exercice 4

1) a. On a $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et $0 \leq X \leq N$, donc :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

b. Comme il choisit au hasard son entrée, chaque visiteur a 1 chance sur 4 de choisir l'entrée n° 1 (épreuve de Bernoulli, probabilité de succès = 1/4). Les k visiteurs se présentent successivement et leur choix est indépendant de celui des autres. Nous sommes en présence d'un schéma de Bernoulli et donc :

$$\text{Quand } N = k, \text{ le nombre } X \text{ de visiteurs qui entrent par l'entrée 1 suit une loi binomiale de paramètres } k \text{ et } \frac{1}{4}.$$

c. On a $(X=n) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (N=k, X=n)$ et pour $k \neq k'$, $(N=k, X=n) \cap (N=k', X=n) = \emptyset$, donc la famille $((N=k, X=n))_{n \geq k}$ forme une partition de l'évènement $(X=n)$.

La loi des probabilités totales donne alors $P(X = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(N = k, X = n)$, soit :

$$P(X = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(N = k)P_{(N=k)}(X = n)$$

Comme N suit une loi de Poisson de paramètre λ , on a $P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Or, d'après la question b, sachant

$N = k$, X suit une loi binomiale de paramètres k et $\frac{1}{4}$, soit $P_{(N=k)}(X = n) = \binom{k}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{k-n}$, on a :

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \binom{k}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{n!(k-n)!} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} \\ &= e^{-\lambda} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n \lambda^n \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \frac{1}{(k-n)!} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} = e^{-\lambda} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{3\lambda}{4}\right)^k = e^{-\lambda} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^n e^{\frac{3\lambda}{4}} \end{aligned}$$

Ainsi, $P(X = n) = e^{-\frac{\lambda}{4}} \frac{(\lambda/4)^n}{n!}$, donc :

$$\text{La variable } X \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \frac{\lambda}{4}.$$

2) a. Comme le joueur réussit de façon certaine le premier lancer ($P(S_1) = 1$) mais peut rater le deuxième, Z vaut au minimum 1 et peut valoir n'importe quel entier supérieur ou égal à 1 (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement ($Z = n$) est l'évènement : « les n premiers lancers sont réussis et le $(n+1)^{\text{ième}}$ est raté »). Ainsi :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

b. On vient de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement ($Z = n$) est l'évènement : « les lancers 1 et 2 et ... et n sont réussis et le $(n+1)^{\text{ième}}$ est raté », donc :

$$(Z = n) = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n \cap \bar{S}_{n+1}$$

On a alors :

$$P(Z = n) = P(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n \cap \bar{S}_{n+1}) = P(S_1)P_{S_1}(S_2)P_{S_1 \cap S_2}(S_3) \dots P_{S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{n-1}}(S_n)P_{S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n}(\bar{S}_{n+1}).$$

Par hypothèse, $P(S_1) = 1$ et pour tout $i \geq 2$, $P_{S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{i-1}}(S_i) = \frac{1}{i}$, donc $P_{S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{i-1}}(\bar{S}_i) = 1 - \frac{1}{i} = \frac{i-1}{i}$. Alors :

$$P(Z = n) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \dots \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1}.$$

Soit :

$$P(Z = n) = \frac{n}{(n+1)!}$$

c. On a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(Z = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \frac{1}{1!} \quad (\text{par télescopage}).$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(Z = n) = 1}$$

Exercice 5

1) On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(X \geq m) &= \sum_{k=m}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=m}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = (1-p)^{m-1} p \sum_{k=m}^{+\infty} (1-p)^{k-m} \\ &= (1-p)^{m-1} p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = (1-p)^{m-1} p \frac{1}{1-(1-p)} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{P(X \geq m) = (1-p)^{m-1}}$$

2) On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc si $Z = \min(X, Y)$, on a aussi $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(\min(X, Y) = k) = P(X = k, Y \geq k) + P(X \geq k+1, Y = k) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = k, Y = i) + \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i, Y = k) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = k) P(Y = i) + \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i) P(Y = k) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p (1-p)^{i-1} p + \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} p (1-p)^{k-1} p \\ &= (1-p)^{2(k-1)} p^2 + 2(1-p)^{k-1} p^2 \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \\ &= (1-p)^{2(k-1)} p^2 + 2(1-p)^{k-1} p^2 (1-p)^k \sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^i \\ &= (1-p)^{2(k-1)} p^2 + 2(1-p)^{2(k-1)} p^2 (1-p) \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^{2(k-1)} p^2 + 2(1-p)^{2(k-1)} p(1-p) \\ &= (2-p)(1-p)^{2(k-1)} p \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P(Z = k) = (2-p)p(1-p)^{2(k-1)}}$$

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc si $W = X - Y$, on a aussi $W(\Omega) = \mathbb{Z}$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} P(W = k) &= P(X - Y = k) = P(X = Y + k) = \sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty} P(X = i+k, Y = i) \\ &= \sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty} P(X = i+k)P(Y = i) = \sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty} (1-p)^{i+k-1} p(1-p)^{i-1} p \\ &= p^2(1-p)^{k-2} \sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty} [(1-p)^2]^i = p^2(1-p)^{k-2} [(1-p)^2]^{\max(1-k,1)} \frac{1}{1-(1-p)^2} \\ &= \frac{p(1-p)^{k-2+2\max(1-k,1)}}{2-p} \end{aligned}$$

Et :

- si $k \geq 0$, $k - 2 + 2\max(1-k,1) = k - 2 + 2 = k$;
- si $k < 0$, $k - 2 + 2\max(1-k,1) = -k$.

Soit, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k - 2 + 2\max(1-k,1) = |k|$ et :

$$P(W = k) = \frac{p(1-p)^{|k|}}{2-p}$$

3) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$. On a :

$$P(Z = i, W = j) = P(\min(X, Y) = i, X - Y = j) = P(\min(Y + j, Y) = i, X = Y + j)$$

Si $j \geq 0$, $\min(Y + j, Y) = Y$, donc :

$$P(Z = i, W = j) = P(Y = i, X = i + j) = p(1-p)^{i-1} p(1-p)^{i+j-1} = p^2(1-p)^{2i+j-2}$$

Si $j < 0$, $\min(Y + j, Y) = Y + j$, donc :

$$P(Z = i, W = j) = P(Y + j = i, X = Y + j) = P(Y = i - j, X = i) = p(1-p)^{i-j-1} p(1-p)^{i-1} = p^2(1-p)^{2i-j-2}$$

Donc :

$$P(Z = i, W = j) = p^2(1-p)^{2i+|j|-2} = p^2(1-p)^{2(i-1)+|j|}.$$

Or :

$$P(Z = i)P(W = j) = (2-p)p(1-p)^{2(i-1)} \frac{p(1-p)^{|j|}}{2-p} = p^2(1-p)^{2(i-1)+|j|}.$$

Ainsi, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, on a $P(Z = i, W = j) = P(Z = i)P(W = j)$, donc :

Les variables aléatoires W et Z sont indépendantes.

Exercice 6

1) Remarquons déjà que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc $\int_a^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ converge, pour tout réel a . Ainsi, $u_n = \int_{\lambda}^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ est bien défini. De plus, on a déjà vu que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(X \leq n) = \sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Or, la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle (qui est C^∞ sur \mathbb{R}) entre 0 et λ donne :

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Et en posant $x = \lambda - t$ dans l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} e^\lambda &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda \frac{x^n}{n!} e^{\lambda-x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{n!} e^\lambda \int_0^\lambda x^n e^{-x} dx \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{n!} e^\lambda \left(\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx - \int_\lambda^{+\infty} x^n e^{-x} dx \right) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{n!} e^\lambda (n! - u_n) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + e^\lambda \left(1 - \frac{1}{n!} u_n \right). \end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda \frac{1}{n!} u_n$ et ainsi :

$$P(X \leq n) = \frac{1}{n!} u_n$$

2) Si pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = (X \leq n)$, on a $A_n \subset A_{n+1}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$. Par continuité croissante, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \leq n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P(\Omega) = 1.$$

Donc :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$$

3) Comme X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, on a $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, donc :

$$G_X(1) = 1 \text{ et } G_X(-1) = e^{-2\lambda}.$$

4) Si B est l'évènement « X prend une valeur paire », on a :

$$P(B) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} P(X = k).$$

Or, pour tout réel t , $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k$, donc :

$$G_X(1) + G_X(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) (-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) [1 + (-1)^k] = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} P(X = k).$$

Ainsi :

$$P(B) = \frac{G_X(1) + G_X(-1)}{2}.$$

Donc :

$$\text{La probabilité que } X \text{ prenne une valeur paire est } \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}.$$

5) Si B' est l'évènement « X prend une valeur divisible par 4 », on a :

$$P(B') = \sum_{\substack{k=0 \\ 4|k}}^{+\infty} P(X = k).$$

Et :

$$\begin{aligned} G_X(1) + G_X(-1) + G_X(i) + G_X(-i) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)(-1)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)i^k + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)(-i)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) [1 + (-1)^k + i^k + (-i)^k] = 4 \sum_{\substack{k=0 \\ 4|k}}^{+\infty} P(X = k) \end{aligned}$$

Donc :

$$P(B') = \frac{G_X(1) + G_X(-1) + G_X(i) + G_X(-i)}{4} = \frac{1 + e^{-2\lambda} + e^{\lambda(i-1)} + e^{\lambda(-i-1)}}{4} = \frac{1 + e^{-2\lambda} + e^{-\lambda}(e^{\lambda i} + e^{-\lambda i})}{4}.$$

Et finalement :

$$\text{La probabilité que } X \text{ prenne une valeur divisible par 4 est } \frac{1 + e^{-2\lambda} + 2e^{-\lambda} \cos \lambda}{4}.$$

6) Appelons C l'évènement « XY est un entier pair ».

Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \{1; 2\}$, XY est toujours entier et :

$$C = \text{« } X \text{ est pair » ou « } Y \text{ est pair »} = B \text{ ou } (Y = 2) = B \cup (Y = 2).$$

On a donc :

$$P(C) = P(B \cup (Y = 2)) = P(B) + P(Y = 2) - P(B \cap (Y = 2)).$$

Et comme X et Y sont indépendantes, on a $P(B \cap (Y = 2)) = P(B)P(Y = 2)$. Ainsi :

$$P(C) = P(B) + P(Y = 2) - P(B)P(Y = 2) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} \frac{1}{2} = \frac{3 + e^{-2\lambda}}{4}.$$

Finalement :

$$\text{La probabilité pour que } XY \text{ soit un entier pair est } \frac{3 + e^{-2\lambda}}{4}.$$

Exercice 7

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

L'équation caractéristique associée à (E) : $y'' + (a-1)y' + by = 0$ est $r^2 + (a-1)r + b = 0$, de discriminant $\Delta = (a-1)^2 - 4b$. La forme des solutions de (E) dépend du signe de Δ , mais dans tous les cas, l'ensemble des solutions est un plan vectoriel $\text{Vect}(f_1, f_2)$ où f_1 et f_2 sont deux solutions de (E) non proportionnelles.

Remarquons que comme $a, b \in \mathbb{N}^*$, on a $a-1 \geq 0$, $b > 0$ et $\Delta = (a-1)^2 - 4b < (a-1)^2$.

- Si $a-1 > 2\sqrt{b} > 0$, soit $\Delta > 0$, on a $f_1 : t \mapsto e^{-\frac{a-1-\sqrt{\Delta}}{2}t}$ et $f_2 : t \mapsto e^{-\frac{a-1+\sqrt{\Delta}}{2}t}$.

Comme $0 < \sqrt{\Delta} < a-1$, on a $a-1+\sqrt{\Delta} > a-1-\sqrt{\Delta} > 0$, donc $\lim_{+\infty} f_1 = \lim_{+\infty} f_2 = 0$.

- Si $a-1 = 2\sqrt{b} > 0$, soit $\Delta = 0$, on a $f_1 : t \mapsto e^{-\frac{a-1}{2}t}$ et $f_2 : t \mapsto t e^{-\frac{a-1}{2}t}$.

Comme $a-1 > 0$, on a $\lim_{+\infty} f_1 = \lim_{+\infty} f_2 = 0$.

- Si $a-1 < 2\sqrt{b}$, soit $\Delta < 0$, $f_1 : t \mapsto e^{-\frac{a-1}{2}t} \cos(\sqrt{|\Delta|}t)$ et $f_2 : t \mapsto e^{-\frac{a-1}{2}t} \sin(\sqrt{|\Delta|}t)$.

- Si $a > 1$, on a $\lim_{+\infty} f_1 = \lim_{+\infty} f_2 = 0$.

- Si $a = 1$, alors $f_1 : t \mapsto \cos(2\sqrt{b}t)$ et $f_2 : t \mapsto \sin(2\sqrt{b}t)$, qui n'ont pas de limite en $+\infty$.

Finalemment :

$$\lim_{+\infty} f_1 = \lim_{+\infty} f_2 = 0 \Leftrightarrow a \neq 1.$$

Or, toutes les solutions de (E) tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement c'est le cas pour f_1 et f_2 , donc :

$$\text{Toutes les solutions de l'équation (E) tendent vers 0 en } +\infty \Leftrightarrow a \neq 1$$

Ainsi, la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation $y'' + (A-1)y' + By = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$ est la probabilité que $A \neq 1$, soit $P(A \neq 1) = P(A > 1) = 1 - P(A = 1)$.

Si p est le paramètre de la loi géométrique suivie par A , on a $P(A = 1) = p$, donc :

La probabilité pour que toutes les solutions de l'équation $y'' + (A-1)y' + By = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$ est $1 - p$ où est le paramètre de la loi géométrique suivie par A .

Exercice 8

1) Notons $Y = aX + b$ et g_Y sa fonction génératrice.

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $Y(\Omega) = \{an + b, n \in \mathbb{N}\}$ et $g_Y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = an + b) t^{an+b}$.

Comme $a > 0$, on a $P(Y = an + b) = P(X = n)$, et :

$$g_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = an + b) t^{an+b} = t^b \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) (t^a)^n = t^b g_X(t^a).$$

Et $g_Y(t)$ est défini quand $g_X(t^a)$ est défini, donc quand $|t^a| < R_X$, soit $t < R_X^{1/a} = R_Y$. Ainsi :

$$g_Y : t \mapsto t^b g_X(t^a) \text{ sur }]-R_Y, R_Y[\text{ avec } R_Y = R_X^{1/a}.$$

2) On a $g_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$, donc $1 \in]-R_X, R_X[$ et par symétrie, -1 aussi. Ainsi :

$$g_X \text{ est définie en } -1 \text{ et } 1.$$

3) On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(X \text{ pair}) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} P(X = n) \\ P(X \text{ impair}) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} P(X = n) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(X \text{ pair}) + P(X \text{ impair}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = g_X(1) \\ P(X \text{ pair}) - P(X \text{ impair}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)(-1)^n = g_X(-1) \end{array} \right.$$

Soit :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} P(X \text{ pair}) = \frac{g_X(1) + g_X(-1)}{2} \\ P(X \text{ impair}) = \frac{g_X(1) - g_X(-1)}{2} \end{array} \right.}$$

4) Si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors $g_X : t \mapsto e^{\lambda(t-1)}$ sur \mathbb{R} , donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_X(1) = e^{\lambda(1-1)} = 1 \\ g_X(-1) = e^{\lambda(-1-1)} = e^{-2\lambda} \end{array} \right.$$

Et :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} P(X \text{ pair}) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} = e^{-\lambda} \operatorname{ch} \lambda \\ P(X \text{ impair}) = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2} = e^{-\lambda} \operatorname{sh} \lambda \end{array} \right.}$$

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors $g_X : t \mapsto (pt + 1 - p)^n$ sur \mathbb{R} , donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_X(1) = 1 \\ g_X(-1) = (1 - 2p)^n \end{array} \right.$$

Et :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} P(X \text{ pair}) = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2} \\ P(X \text{ impair}) = \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2} \end{array} \right.}$$

Exercice 9

1) Soit $B \in \mathcal{A}$. Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = (X \in B) \cap (X' \in B) \cap (X \neq X') \\ A_2 = (X \in B) \cap (X' \in B) \cap (X = X') \\ A_3 = (X \in B) \cap (X' \notin B) \cap (X \neq X') \\ A_4 = (X \in B) \cap (X' \notin B) \cap (X = X') = \emptyset \end{array} \right.$$

On a $(X \in B) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ et l'union est disjointe.

Alors :

$$P(X \in B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Et :

$$\begin{cases} A_1 = (X \in B) \cap (X' \in B) \cap (X \neq X') \subset (X \neq X') \\ A_2 = (X \in B) \cap (X' \in B) \cap (X = X') \subset (X' \in B) \\ A_3 = (X \in B) \cap (X' \notin B) \cap (X \neq X') \subset (X \neq X') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A_1) \leq P(X \neq X') \\ P(A_2) \leq P(X' \in B) \\ P(A_3) \leq P(X \neq X') \end{cases}$$

Donc :

$$P(X \in B) \leq P(X \neq X') + P(X' \in B) + P(X \neq X').$$

Soit :

$$P(X \in B) - P(X' \in B) \leq 2P(X \neq X').$$

Les variables X et X' jouant des rôles similaires, on obtient de même $P(X' \in B) - P(X \in B) \leq 2P(X \neq X')$ et ainsi :

$$\boxed{|P(X \in B) - P(X' \in B)| \leq 2P(X \neq X')}$$

2) On a :

$$\sum_{(i,i') \in \mathbb{N}^2} P((Y_m, Y_m') = (i, i')) = \sum_{(i,i') \in \mathbb{N}^2, i < 2} P((Y_m, Y_m') = (i, i')) + \sum_{(i,i') \in \mathbb{N}^2, i \geq 2} P((Y_m, Y_m') = (i, i')) \geq \sum_{(i,i') \in \mathbb{N}^2, i \geq 2} a$$

Or, si $a \neq 0$, la somme $\sum_{(i,i') \in \mathbb{N}^2, i \geq 2} a$ est infinie, ce qui est absurde car $\sum_{(i,i') \in \mathbb{N}^2} P((Y_m, Y_m') = (i, i')) = 1$, donc :

$$\boxed{a = 0}$$

On a :

$$\begin{aligned} P(Y_m = 0) &= \sum_{i' \in \mathbb{N}} P((Y_m, Y_m') = (0, i')) = P((Y_m, Y_m') = (0, 0)) + \sum_{i' \in \mathbb{N}^*} P((Y_m, Y_m') = (0, i')) = 1 - p_m \\ P(Y_m = 1) &= \sum_{i' \in \mathbb{N}} P((Y_m, Y_m') = (1, i')) = P((Y_m, Y_m') = (1, 0)) + \sum_{i' \in \mathbb{N}^*} P((Y_m, Y_m') = (1, i')) \\ &= e^{-p_m} - (1 - p_m) + \sum_{i' \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-p_m} p_m^{i'}}{i'!} = e^{-p_m} \sum_{i' \in \mathbb{N}} \frac{p_m^{i'}}{i'!} - 1 + p_m = e^{-p_m} e^{p_m} - 1 + p_m = p_m \end{aligned}$$

Et pour tout entier $i \geq 2$:

$$P(Y_m = i) = \sum_{i' \in \mathbb{N}} P((Y_m, Y_m') = (i, i')) = 0.$$

Soit $i' \in \mathbb{N}$. Comme $P((Y_m, Y_m') = (i, i')) = 0$ pour tout entier $i \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y_m' = i') &= \sum_{i \in \mathbb{N}} P((Y_m, Y_m') = (i, i')) = P((Y_m, Y_m') = (0, i')) + P((Y_m, Y_m') = (1, i')) \\ &= \begin{cases} 1 - p_m + e^{-p_m} - (1 - p_m) & \text{si } i' = 0 \\ 0 + \frac{e^{-p_m} p_m^{i'}}{i'!} & \text{si } i' \in \mathbb{N}^* \end{cases} = \frac{e^{-p_m} p_m^{i'}}{i'!} \end{aligned}$$

Finalement :

$$Y_m \hookrightarrow \mathcal{B}(p_m) \text{ et } Y_m' \hookrightarrow \mathcal{P}(p_m)$$

Soit $m \in 1, n$. Par définition de la loi conjointe de Y_m et Y_m' , on a pour tout $i' \in \mathbb{N}^*$, $P((Y_m, Y_m') = (0, i')) = 0$.

Or, d'après ce qui précède, $P(Y_m = 0)P(Y_m' = i') = (1 - p_m) \frac{e^{-p_m} p_m^{i'}}{i!'}$, donc :

$$P((Y_m, Y_m') = (0, i')) \neq P(Y_m = 0)P(Y_m' = i').$$

Ainsi, pour tout $m \in 1, n$:

$$Y_m \text{ et } Y_m' \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

3) Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $P(X_n \neq X_n') \leq \sum_{m=1}^n p_m^2$ avec $X_n = \sum_{m=1}^n Y_m$ et $X_n' = \sum_{m=1}^n Y_m'$.

- Pour $n=1$, on a :

$$P(Y_1 = Y_1') = P((Y_1, Y_1') = (0, 0)) + P((Y_1, Y_1') = (1, 1)) = 1 - p_1 + e^{-p_1} p_1.$$

Donc :

$$P(Y_1 \neq Y_1') = 1 - P(Y_1 = Y_1') = p_1 - e^{-p_1} p_1 = p_1(1 - e^{-p_1}).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$, soit $1 - e^{-x} \leq x$, donc $1 - e^{-p_1} \leq p_1$ et ainsi :

$$P(Y_1 \neq Y_1') \leq p_1^2.$$

La propriété est vraie au rang 1.

- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère $(p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}) \in [0, 1]^{n+1}$ et $(Y_m, Y_m')_{m \in 1, n+1}$ des couples de variables aléatoires vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On a :

$$(X_{n+1} \neq X_{n+1}') = [(X_n = X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')] \cup [(X_n \neq X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')].$$

L'union est disjointe donc :

$$P(X_{n+1} \neq X_{n+1}') = P[(X_n = X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')] + P[(X_n \neq X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')].$$

Et :

$$\begin{aligned} [(X_n = X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')] &= [(X_n = X_n') \cap (Y_{n+1} \neq Y_{n+1}')] \subset (Y_{n+1} \neq Y_{n+1}') \\ [(X_n \neq X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')] &\subset (X_n \neq X_n') \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P[(X_n = X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')] &\leq P(Y_{n+1} \neq Y_{n+1}') \\ P[(X_n \neq X_n') \cap (X_{n+1} \neq X_{n+1}')] &\leq P(X_n \neq X_n') \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$P(X_{n+1} \neq X_{n+1}') \leq P(Y_{n+1} \neq Y_{n+1}') + P(X_n \neq X_n').$$

Par hypothèse de récurrence, $P(X_n \neq X_n') \leq \sum_{m=1}^n p_m^2$ et comme pour $n=1$, on a $P(Y_{n+1} \neq Y_{n+1}') \leq p_{n+1}^2$, donc :

$$P(X_{n+1} \neq X_{n+1}') \leq \sum_{m=1}^n p_m^2 + p_{n+1}^2 = \sum_{m=1}^{n+1} p_m^2.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{P\left(\sum_{m=1}^n Y_m \neq \sum_{m=1}^n Y_m'\right) \leq \sum_{m=1}^n p_m^2}$$