DS de Mathématiques n° 3

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

Exercice 1 (extrait : E3A - PSI - 2011)

On considère les suites de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(t) = \frac{1}{1+(t+2\pi n)^2} \quad \text{et} \quad v_n(t) = \frac{1}{1+(t-2\pi n)^2}$$

Partie A

(1) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et v_n convergent simplement sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit a un réel strictement positif.

(a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a).$$

(b) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et u_n' convergent uniformément sur $[-a,a]$.

On admettra qu'il en est de même pour les séries de fonctions de terme général v_n et v_n'.

(3) On pose $F = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$

(a) Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ecrire l'énoncé précis du théorème utilisé.

(b) Démontrer que F est paire.

(c) Démontrer que F est 2π-périodique.

Exercice 2 (extrait : Centrale - PSI - 2015)

On admettra le théorème suivant (lemme de Cesaro) : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels convergente vers l et si on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$, alors la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers l.

I Étude d'une suite récurrente

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que f' et f'' soient à valeurs positives. On suppose $f(1) = 1$, $f'(0) < 1$ et $f''(1) > 0$.
On considère de plus la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On pose $m = f'(1)$.

I.A –

I.A.1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis qu'elle est convergente. On note l sa limite.

I.A.2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution. Dans toute la suite, on la notera x_f.

I.A.3) Montrer que $l = x_f$.

I.B – On suppose $m > 1$. Montrer que $x_f \in [0,1[$.

I.C – On suppose maintenant $m \leqslant 1$. Montrer que $x_f = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$.

I.D – Dans cette question, on suppose $m = 1$.

I.D.1) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right) = \frac{f''(1)}{2}$.

I.D.2) En déduire que, quand n tend vers l'infini, $1 - u_n \sim \frac{2}{f''(1)n}$.

On pourra utiliser le lemme de Cesaro admis en préambule.

I.E – On suppose maintenant $m < 1$ et on pose encore, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$.

I.E.1) Montrer que la série de terme général ε_n est absolument convergente et en déduire la convergence de celle de terme général $\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$.

I.E.2) En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que, quand n tend vers l'infini, $1 - u_n \sim cm^n$.

Exercice 3 (extrait : Mines - PSI - 2019)

Soit un entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$S_{r,p} : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}.$$

On veut prouver que (pour x réel) :

$$S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x.$$

On admet que la propriété ci-dessus est vraie pour $p = 1$ (*ce résultat est établi dans une autre partie du sujet original*).

1) Montrer que la série entière $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ a un rayon de convergence infini et faire de même pour $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}$.

Dans la suite on prend $p \geq 2$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{n^r}{n!} x^n .$$

2) On fixe un réel $x > 0$. Étudier le signe de la fonction :

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\; \mapsto \; t^{1-r}(t-1)^r - x .$$

Montrer en particulier que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on notera t_x.

En déduire que, si $N_x = \lfloor t_x \rfloor$ (la partie entière de t_x), la suite finie $\left(u_n(x)\right)_{0 \leq n \leq N_x}$ est croissante et que la suite $\left(u_n(x)\right)_{n \geq N_x}$ est décroissante.

L'ensemble $\{u_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ admet donc un maximum valant $u_{N_x}(x)$. Dans la suite de cette partie, ce maximum sera noté M_x.

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Déterminer la limite de $\varphi_x(x+\alpha)$ quand x tend vers + ∞. En déduire que :

$$t_x - x - r \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 .$$

Pour établir ce dernier résultat, on pourra revenir à la définition d'une limite.

☺ *Ou bien : on pourra montrer que* $\varphi : t \mapsto t^{1-r}(t-1)^r$ *réalise une bijection strictement croissante de* $[1, +\infty[$ *vers* $[0, +\infty[$, *et calculer* $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(t - \varphi(t)\right)$.

4) Montrer que pour tout entier relatif k :

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x)$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

5) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{i = \lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geq m \, u_{\lfloor x \rfloor}(x) \text{ pour } x \text{ voisin de } +\infty.$$

En déduire que, pour x voisin de + ∞ :

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m} .$$

6) En déduire que pour tout entier relatif k :

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right)$$

puis que :

$$M_x = \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

En vue de ce dernier résultat, on pourra commencer par démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ *pour un entier i compris entre* $\lfloor r \rfloor - 1$ *et* $\lfloor r \rfloor + 2$.

7) Dans cette question et la suivante, on fixe un nombre complexe z tel que $|z|=1$ et $z \neq 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|D_n| \leq \frac{2}{|1-z|}$$

et que les séries $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum D_n u_n(x)$ sont absolument convergentes.

8) On conserve le nombre complexe z introduit dans la question précédente. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D_n \left(u_{n-1}(x) - u_n(x)\right) = S_{r,1}(zx)$$

puis que, pour x voisin de $+\infty$:

$$|S_{r,1}(zx)| \leq \frac{4M_x}{|1-z|}.$$

Conclure à la relation :

$$S_{r,1}(zx) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

9) On pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = p\, S_{r,p}(x)$$

En déduire le résultat désiré.

Exercice 4 (extrait : CCP - PSI - 2018)

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

Q1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \quad \Delta(P) = XP.'$$

Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Delta(X^k)$.

Q2. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $X^2 P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbf{R}[X]$.

Q3. Montrer que si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $\Delta(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.

On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ induit par Δ.

Q4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q5. On définit l'application Φ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \quad \Phi(P) = X^2 P'' + aXP'.$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

Q6. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q7. Montrer que Φ_n est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \quad \varphi(P) = X^2 P'' + aXP' + bP.$$

Q8. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n. Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

Q9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

Q10. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières $m_1, m_2 \in [\![0, n]\!]$.

Q11. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0, n]\!]$.

Q12. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Fin de l'énoncé