# *Résumé des chapitres de probabilités*

## *Définitions*

### *Ensemble, famille dénombrable*

Un ensemble est dit dénombrable s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est dénombrable si l'ensemble $\{x_i, i\in I\}$ est dénombrable.

### *Tribu, univers, événements*

Soit Ω un ensemble.

On appelle tribu sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

i. $\Omega\in\mathcal{A}$ ;
ii. pour tout $A\in\mathcal{A}$, $\overline{A}=\Omega\setminus A\in\mathcal{A}$ ;
iii. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

L'ensemble Ω est appelé univers.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés événements.

### *Système complet dénombrable d'événements*

Un système complet dénombrable d'événements est une famille dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements non vides, incompatibles deux à deux et telle que $\bigcup_{i\in I} A_i=\Omega$.

### *loi de probabilité, espace probabilisé*

Si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, on appelle loi de probabilité ou probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$, une application $P:\mathcal{A}\to[0;1]$ telle que :

i. $P(\Omega)=1$.
ii. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements incompatibles deux à deux, $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega,\mathcal{A},P)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et *P* une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$.

### *Evènement quasi-certain, quasi-impossible*

Un évènement quasi-certain est un évènement de probabilité 1.

Un évènement quasi-impossible est un évènement de probabilité 0.

### *Probabilité conditionnelle*

Si *A* et *B* sont deux événements tels que $P(B)>0$, la probabilité conditionnelle de *A* sachant *B* est :

$$P_B(A)=P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

L'application $P_B$ est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ appelée probabilité conditionnée à *B*.

***Evènements indépendants***

Deux évènements $A$ et $B$ sont <u>indépendants</u> si $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

***Evènements mutuellement indépendants***

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'évènements. On dit que $A_1,...,A_n$ sont <u>mutuellement indépendants</u> si pour tout $p\in [\![2,n]\!]$ et tout $(i_1,i_2,...,i_p)\in [\![1,n]\!]^p$ tel que $i_1<i_2<...<i_p$ :

$$P(A_{i_1}\cap...\cap A_{i_p})=P(A_{i_1})\times...\times P(A_{i_p}).$$

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements. On dit que les $A_i$ sont <u>mutuellement indépendants</u> si les éléments de toute sous-famille finie de $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants.

***Variable aléatoire***

Une <u>variable aléatoire discrète</u> $X$ sur $(\Omega,\mathcal{A})$ est une application définie sur $\Omega$ dont l'image $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}$.

Lorsque $X(\Omega)\subset\mathbb{R}$, on parle de <u>variable aléatoire réelle</u> (var).

***Loi d'une variable aléatoire***

L'application $P_X:\mathscr{P}\big(X(\Omega)\big)\to[0;1]\,;A\mapsto P(X\in A)$ est une loi de probabilité sur $\Big(X(\Omega),\mathscr{P}\big(X(\Omega)\big)\Big)$, appelée <u>loi de la variable aléatoire</u> $X$.

***Fonction de répartition***

Si $X$ est à valeurs réelles, la <u>fonction de répartition</u> de $X$ est la fonction $F_X:x\mapsto P(X\leq x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

***Loi conjointe, lois marginales***

L'application de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $[0;1]$, qui, à tout $(x,y)$ de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$, associe $P\big(X=x,Y=y\big)$ est appelée <u>loi conjointe</u> du couple $(X,Y)$.

Les <u>lois marginales</u> de $(X,Y)$ sont les lois de $X$ et de $Y$.

***Loi conditionnelle***

Soit $y\in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y)\neq 0$. L'application :

$$P_{(Y=y)}:X(\Omega)\to[0;1]\ ;\ x\mapsto P_{(Y=y)}(X=x)$$

est appelée <u>loi conditionnelle de $X$ sachant $(Y=y)$</u>.

***Indépendance de deux variables aléatoires***

Deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sont dites <u>indépendantes</u> si, pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ :

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)\times P(Y=y).$$

***Mutuelle indépendance***

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur Ω. On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ou mutuellement indépendantes si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les évènements $(X_1 = x_1)$, … , $(X_n = x_n)$ sont mutuellement indépendants.

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires sur Ω, les variables aléatoires $X_n$ sont mutuellement indépendantes si pour toute partie finie $A \subset \mathbb{N}$, la famille finie $(X_n)_{n \in A}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

***Fonction ou série génératrice***

Soit *X* une variable aléatoire *X* à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La fonction ou série génératrice de *X* est la série entière :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n = E(t^X).$$

Le rayon de convergence est au moins 1 avec $G_X(1) = 1$.

***Espérance***

Si *X* est à valeurs dans un ensemble dénombrable $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, on dit que *X* est d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. Si tel est le cas, on appelle espérance de *X*, notée $E(X)$, le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.

***Moment (HP)***

Sous réserve de convergence, le moment d'ordre *r* de *X* (avec $r \in \mathbb{N}^*$) est :

$$E(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) x^r.$$

***Variance et écart-type***

Si $X^2$ est d'espérance finie, la variance de *X* est $V(X) = E\left(\left[X - E(X)\right]^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$.

L'écart-type de *X* est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

***Covariance et coefficient de corrélation***

On appelle covariance de *X* et *Y* le réel :

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right].$$

On appelle coefficient de corrélation de *X* et *Y* le réel :

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

## *Ensembles dénombrables*

- Un ensemble dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$.
- $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
- Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

## *Tribus et univers*

*$\mathcal{A}$ est une tribu sur un univers $\Omega$.*

- *Lois de Morgan généralisées* : Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements. On a :

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}\,.$$

- $\varnothing \in \mathcal{A}$.
- Toute réunion ou intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, autrement dit, toute intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.

## *Loi de probabilité*

*$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.*

Soit $A$ et $B$ deux événements de $\Omega$.

- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

  avec $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$ si $A$ et $B$ sont incompatibles ($A\cap B = \varnothing$).
- $A\subset B \quad \Rightarrow \quad P(A)\leq P(B)$.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\Omega$.

  <u>Continuité croissante</u> :

  - Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $A_n\subset A_{n+1}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
  - Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quelconque, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\in\ 0,n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

  <u>Continuité décroissante</u> :

  - Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $A_{n+1}\subset A_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
  - Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quelconque, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k\in\ 0,n} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
- <u>*Sous-additivité*</u> *:*

  Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\Omega$ telle que $\sum P(A_n)$ converge.

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\,.$$

## *Variables aléatoires*

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *est un espace probabilisé ; X, Y sont des variables aléatoires discrètes.*

- Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement, c'est-à-dire $X^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.
  *Notation* : L' évènement $X^{-1}(U)$ est noté $(X \in U)$ ou $\{X \in U\}$.
- Si $X$ prend ses valeurs dans $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, les $x_n$ étant distincts deux à deux, et si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité $P$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = x_n) = p_n$.
- Si $X$ est une à valeurs réelles.
  - La fonction de répartition $F_X$ est croissante.
  - $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
- Pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$, on a :
$$P(X \in A, Y \in B) = \sum_{(a,b)\in A\times B} P(X = a, Y = b).$$
- Soient $A$ et $A'$ sont deux parties disjointes de $X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$. On a :
$$P(X \in A \cup A', Y \in B) = P(X \in A, Y \in B) + P(X \in A', Y \in B).$$

## *Conditionnement*

- *Formule des probabilités composées* :
  Soit $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ une famille d'évènements.
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{m-2}}(A_{m-1})P_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{m-1}}(A_m).$$
- *Formule des probabilités totales* :
  Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements. La série $\sum P(A_n \cap B)$ converge et :
$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B).$$
- *Formules de Bayes* :
  - Si $A$ et $B$ sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors :
$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$
  - Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et si $B$ est un événement tel que $P(B) > 0$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ :
$$P_B(A_N) = \frac{P(A_N)P_{A_N}(B)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B)}.$$

# *Indépendance*

- Si $P(B)>0$, l'indépendance de $A$ et $B$ équivaut à $P_B(A)=P(A)$.
- Deux évènements $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si $A$ et $\bar{B}$ le sont (***non mentionnée dans le programme***).
- Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors, pour toute partie $A\subset X(\Omega)$ et toute partie $B\subset Y(\Omega)$, on a :
$$P(X\in A, Y\in B)=P(X\in A)\times P(Y\in B).$$
Autrement dit, les évènements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants.
- Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors pour toutes fonctions $f$ et $g$, définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.
- Si $X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors, quel que soit $(A_1,\dots,A_n)\in\mathscr{P}\left(X_1(\Omega)\right)\times\dots\times\mathscr{P}\left(X_n(\Omega)\right)$, les événements $(X_i\in A_i)$ sont mutuellement indépendants.
- Si $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Quand les séries convergent, on a : $G_{X_1+X_2}=G_{X_1}G_{X_2}$.

# *Espérance*

- Si $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie, alors $E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X\geq n)$.
- <u>*Théorème du transfert*</u> :
Soient $X$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$ et $f$ une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles. La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X=x_n)f(x_n)$ converge absolument et, dans ce cas, on a :
$$E\left(f(X)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}f(x_n)P(X=x_n).$$
- Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles d'espérance finie.
    - <u>*Linéarité de l'espérance*</u> : pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$.
    - <u>*Positivité de l'espérance*</u> : si pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\geq 0$ alors $E(X)\geq 0$.
    - <u>*Croissance de l'espérance*</u> : si pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\leq Y(\omega)$ alors $E(X)\leq E(Y)$.
- Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes et d'espérances finies, alors :
$$E(XY)=E(X)E(Y).$$
- <u>*Inégalité de Markov*</u> :
Si $X$ est une variable aléatoire réelle d'espérance finie et positive sur $\Omega$, alors pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ :
$$P(X\geq a)\leq\frac{E(X)}{a}.$$
- La variable aléatoire $X$ admet une espérance $E(X)$ si et seulement si $G_X$ est dérivable en 1.
Si tel est le cas, on a alors : $E(X)=G_X'(1)$.

## Variance

- Si $X$ est à valeurs dans un ensemble dénombrable $X(\Omega)=\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$ et la variable aléatoire $X^2$ est d'espérance finie, alors $X$ est elle-même d'espérance finie et on a :

$$E\left(\left[X-E(X)\right]^2\right)=E(X^2)-E(X)^2.$$

- Soit $X$ est une variable aléatoire réelle admettant une variance finie.
Pour tous réels $a$ et $b$, la variable aléatoire $aX+b$ admet une variance finie et on a :

$$V(aX+b)=a^2V(X).$$

- *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev* :

Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ : $P\left(\left|X-E(X)\right|\geq a\right)\leq\dfrac{V(X)}{a^2}$.

- *Loi faible des grands nombres* :

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, suivant la même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$, $m=E(X_1)$ et $\sigma=\sigma(X_1)$, on a pour tout réel $\varepsilon>0$ : $P\left(\left|\frac{1}{n}S_n-m\right|\geq\varepsilon\right)\leq\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ et $P\left(\left|\frac{1}{n}S_n-m\right|\geq\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

- La variable aléatoire $X$ admet une variance si et seulement si $G_X$ est deux fois dérivable en 1.

Si tel est le cas, on a alors : $V(X)=G_X''(1)+G_X'(1)-G_X'(1)^2$.

## Covariance

*Dans cette partie, on considère deux variables aléatoires réelles discrètes $X$ et $Y$ telles que $X^2$ et $Y^2$ soient d'espérance finie (donc $X$ et $Y$ aussi).*

- $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.
- *Symétrie* : $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$.
- *Bilinéarité* : si $X_1$, $X_2$ et $Y$ sont trois variables aléatoires réelles discrètes dont le carré est d'espérance finie, alors pour tous réels $a$ et $b$, on a :

$$\operatorname{cov}(aX_1+bX_2,Y)=a\operatorname{cov}(X_1,Y)+b\operatorname{cov}(X_2,Y)$$
$$\operatorname{cov}(Y,aX_1+bX_2)=a\operatorname{cov}(Y,X_1)+b\operatorname{cov}(Y,X_2)$$

- Pour tous réels $a$ et $b$, on a : $V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2ab\operatorname{cov}(X,Y)$.
- Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* :
Si $X^2$ et $Y^2$ sont d'espérance finie, alors $XY$ l'est aussi et on a :

$$\left|E(XY)\right|\leq\sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}\qquad\left|\operatorname{cov}(X,Y)\right|\leq\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}=\sigma(X)\sigma(Y)\qquad-1\leq\rho(X,Y)\leq1.$$

Et on a égalité si et seulement si $X$ et $Y$ sont proportionnelles avec probabilité de 1.

- Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes telles que $X_i^2$ est d'espérance finie pour tout $i \in [\![ 1, n ]\!]$, alors :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \operatorname{cov}(X_i, X_j) .$$

Et, si $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) .$$

# *Lois usuelles*

## Loi uniforme

Une variable aléatoire $X$ définie sur $\Omega$, avec $\operatorname{Card}\big(X(\Omega)\big) = N$, suit une loi uniforme si pour tout $x \in X(\Omega)$ :

$$P(X = x) = \frac{1}{N}.$$

- *Série génératrice* : Pour tout $t \in \mathbb{R}$ : $G_X(t) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n \in X(\Omega)} t^n$.
- *Espérance* : Si $X$ suit une loi uniforme avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors : $E(X) = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

## Loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles (notées en général succès et échec).

Une variable aléatoire de Bernoulli est une variable aléatoire $X$ telle que $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Une loi de Bernoulli est la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli ou à variable aléatoire de Bernoulli.

La probabilité $p \in [0;1]$ est de « succès », soit $(X = 1)$, est appelée paramètre de la loi, qui est notée $\mathscr{B}(p)$.

Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ : $\begin{cases} P(X = 1) = p \\ P(X = 0) = 1 - p \end{cases}$.

- *Série génératrice* : Pour tout $t \in \mathbb{R}$ : $G_X(t) = pt + 1 - p$.
- *Espérance* : $E(X) = p$.
- *Variance* : $V(X) = p(1 - p)$.

## Loi binomiale

Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire consistant à répéter une épreuve de Bernoulli plusieurs fois de suite et de manière indépendante.

Une loi binomiale est la loi suivie par la variable aléatoire donnant le nombre de succès à l'issue d'un schéma de Bernoulli. Si l'épreuve de Bernoulli est répétée $n$ fois et $p$ est le paramètre associé à l'épreuve, la loi binomiale est notée $\mathscr{B}(n, p)$ et $n$ et $p$ sont les paramètres de cette loi.

- Si $X_1, \ldots, X_n$ sont $n$ variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et toutes de même paramètre $p$, alors $X_1 + \ldots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, pour tout $k \in X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ : $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

- *Série génératrice* : Pour tout $t \in \mathbb{R}$ : $G_X(t) = (pt + 1 - p)^n$.
- *Espérance* : $E(X) = np$.
- *Variance* : $V(X) = np(1 - p)$.

## Loi géométrique

Si on répète indéfiniment et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre *p*, alors le rang d'apparition du premier succès suit une loi géométrique de paramètre *p* avec $p \in ]0,1[$.

Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, pour tout $k \in X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ :

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

- Une loi géométrique est une loi *sans mémoire* : si une variable aléatoire *X* suit une loi géométrique de paramètre *p*, alors pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P_{(X>n)}(X > n+k) = P(X > k).$$

  Réciproquement, toute loi vérifiant la propriété ci-dessus est une loi géométrique.

Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ :

- *Série génératrice* : Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[$ : $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$.
- *Espérance* : $E(X) = \dfrac{1}{p}$.
- *Variance* : $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

## Loi de Poisson

Une variable aléatoire *X* suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

- Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$. La variable $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
- *Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson* : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires sur $\Omega$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} n p_n = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ :

- *Série génératrice* : Pour tout $t \in \mathbb{R}$ : $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
- *Espérance* : $E(X) = \lambda$.
- *Variance* : $V(X) = \lambda$.