

Résumé du chapitre 11 : Intégrales à paramètre

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} et les fonctions sont à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème : Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I .
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I .
- Il existe une fonction φ , continue par morceaux et intégrable sur I , telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, on a $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$.

Alors :

$$f_n \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I \text{ et } \int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

Théorème : Théorème d'intégration terme à terme

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I .
- La série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f , continue par morceaux sur I .
- La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors :

$$f \text{ est intégrable sur } I \text{ et } \int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Intégrales à paramètre

Théorème : Continuité

Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times J$.

- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I .
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors :

$$\text{Pour tout } x \in I, t \mapsto f(x, t) \text{ est intégrable sur } J \text{ et } x \mapsto \int_J f(x, t) dt \text{ est continue sur } I.$$

Théorème : Dérivation sous le signe somme

Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I \times J$.

- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I .
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J .
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi(t)$.

Alors :

La fonction $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est de classe C^1 sur I , de dérivée $x \mapsto \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Théorème : Extension aux fonctions de classe C^k

Soient $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I \times J$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur I .
- Pour tout $x \in I$ et tout $i \in \{0, k-1\}$, $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J .
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on ait $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq \varphi(t)$.

Alors :

La fonction $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est de classe C^k sur I , de dérivées successives $x \mapsto \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$.

Corollaire : Classe C^∞

Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I \times J$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur I ;
- pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;
- il existe une fonction φ_k positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on ait $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq \varphi_k(t)$.

Alors :

La fonction $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est de classe C^∞ sur I , de dérivées successives $x \mapsto \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$.