Résumé du chapitre 13 : Variables aléatoires discrètes

Dans tout le chapitre, Ω *est un ensemble muni d'une tribu* $\mathcal{A}$.

I - Variables aléatoires discrètes

I-1. Généralités

Définition :

Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega,\mathcal{A})$ est une application définie sur Ω dont l'image $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}$.

Lorsque $X(\Omega)\subset\mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle (var).

Propriété :

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathcal{A})$.
Pour tout $U\subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement, c'est-à-dire $X^{-1}(U)\in\mathcal{A}$.

Notations : L' évènement $X^{-1}(U)$ est noté $(X\in U)$ ou $\{X\in U\}$.

I-2. Loi d'une variable aléatoire discrète

Dans toute la suite, on se place dans espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *et X est une variable aléatoire discrète.*

a. Définition :

Propriété et définition :

L'application $P_X:\mathscr{P}(X(\Omega))\to[0;1]; A\mapsto P(X\in A)$ est une loi de probabilité sur $(X(\Omega),\mathscr{P}(X(\Omega)))$, appelée loi de la variable aléatoire X.

Propriété :

Si X prend ses valeurs dans $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$, les x_n étant distincts deux à deux, et si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty}p_n=1$, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega,\mathcal{A})$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(X=x_n)=p_n$.

b. Fonction de répartition :

Définition :

Si X est à valeurs réelles, la fonction de répartition de X est la fonction $F_X: x\mapsto P(X\leq x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

Propriétés :

- La fonction F_X est croissante.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}F_X(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}F_X(x)=0$.

II - Couple de variables aléatoires discrètes

II-1. Loi conjointe et lois marginales

Définitions :

L'application de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $[0;1]$, qui, à tout (x,y) de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$, associe $P\left(X=x,Y=y\right)$ est appelée loi conjointe du couple (X,Y).

Les lois marginales de (X,Y) sont les lois de X et de Y.

Propriétés : (***non mentionnées dans le programme de 2ème année, mais mentionnées dans celui de 1ère année***)

Pour tout $(A,B)\in\mathscr{P}\left(X(\Omega)\right)\times\mathscr{P}\left(Y(\Omega)\right)$, on a :

$$P\left(X\in A,Y\in B\right)=\sum_{(a,b)\in A\times B}P\left(X=a,Y=b\right).$$

Soient A et A' sont deux parties disjointes de $X(\Omega)$ et $B\subset Y(\Omega)$. On a :

$$P\left(X\in A\cup A',Y\in B\right)=P\left(X\in A,Y\in B\right)+P\left(X\in A',Y\in B\right).$$

II-2. Indépendance

a. Loi conditionnelle :

Définition :

Soit $y\in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y)\neq 0$. L'application :

$$P_{(Y=y)}:X(\Omega)\to[0;1]\ ;\ x\mapsto P_{(Y=y)}(X=x)$$

est appelée loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$.

b. Indépendance d'un couple de variables aléatoires :

Définition :

Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si, pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$:

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)\times P(Y=y).$$

Propriété :

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toute partie $A\subset X(\Omega)$ et toute partie $B\subset Y(\Omega)$, on a :

$$P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)\times P(Y\in B).$$

Autrement dit, les évènements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants.

Propriété :

Si X et Y sont indépendantes, alors pour toutes fonctions f et g, définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

c. Mutuelle indépendance :

Définition :

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur Ω. On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes ou mutuellement indépendantes si pour tout $(x_1,...,x_n) \in X_1(\Omega)\times...\times X_n(\Omega)$, les évènements $(X_1 = x_1)$, … , $(X_n = x_n)$ sont mutuellement indépendants.

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires sur Ω, les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes si pour toute partie finie $A \subset \mathbb{N}$, la famille finie $(X_n)_{n\in A}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Propriété : (***non mentionnée dans le programme de 2ème année, mais mentionnée dans celui de 1ère année***)

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors, quel que soit $(A_1,...,A_n) \in \mathscr{P}\left(X_1(\Omega)\right)\times...\times\mathscr{P}\left(X_n(\Omega)\right)$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

III - Lois usuelles

Résultats de première année

III-1. Lois usuelles sur un univers fini

a. Loi uniforme :

Si X est une variable aléatoire sur Ω, la loi P_X peut être uniforme quand $X(\Omega)$ est fini : toutes les valeurs de $X(\Omega)$ ont la même probabilité, égale à $\dfrac{1}{\mathrm{Card}\left(X(\Omega)\right)}$.

b. Loi de Bernoulli :

Définitions :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles (notées en général succès et échec).

Une variable aléatoire de Bernoulli est une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{0,1\}$.

Une loi de Bernoulli est la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli ou à variable aléatoire de Bernoulli.

Si $p \in [0;1]$ est la probabilité de « succès » ou de $(X = 1)$, p est appelé paramètre de la loi, qui est alors notée $\mathscr{B}(p)$. Pour une variable aléatoire de Bernoulli, X, on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

c. Loi binomiale :

Définitions :

Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire consistant à répéter une épreuve de Bernoulli plusieurs fois de suite et de manière indépendante.

Une loi binomiale est la loi suivie par la variable aléatoire donnant le nombre de succès à l'issue d'un schéma de Bernoulli. Si l'épreuve de Bernoulli est répétée n fois et p est le paramètre associé à l'épreuve, la loi binomiale est notée $\mathscr{B}(n, p)$ et n et p sont les paramètres de cette loi.

Notation : Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, on note : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. On a pour tout $k \in \; 0,n \;$:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Propriété :

Si $X_1,\dots,X_n$ sont n variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et toutes de même paramètre p, alors $X_1+\dots+X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

III-2. Loi géométrique

Définition :

Si on répète indéfiniment et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p, alors le rang d'apparition du premier succès suit une loi géométrique de paramètre p.

Notation : Si une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p, on note : $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

On a $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p.$$

Propriété :

Une loi géométrique est une loi *sans mémoire* : si une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p, alors pour tous $k,n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P_{(X>n)}(X>n+k)=P(X>k).$$

Réciproquement, toute loi vérifiant la propriété ci-dessus est une loi géométrique.

III-3. Loi de Poisson

Définition :

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, si $X(\Omega)=\mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X=n)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Notation : Si une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, on note : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Propriété :

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. La variable X_1+X_2 suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

III-4. Un résultat asymptotique

Propriété : *Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson*

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires sur Ω telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} n p_n = \lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

IV - Série génératrice

IV-1. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition :

Soit *X* une variable aléatoire *X* à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La fonction ou série génératrice de *X* est la série entière :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n = E(t^X).$$

Le rayon de convergence est au moins 1 avec $G_X(1) = 1$.

Propriété :

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Quand les séries convergent, on a :

$$G_{X_1+X_2} = G_{X_1}G_{X_2}.$$

IV-2. Série génératrice des lois usuelles

Propriété :

Soit *X* une variable aléatoire à valeurs entières.

- Si $X(\Omega)$ est fini de cardinale *N* et *X* suit une loi uniforme, alors $G_X(t) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n\in X(\Omega)} t^n$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, $G_X(t) = pt + 1 - p$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, $G_X(t) = (pt + 1 - p)^n$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ sur $\left]-\dfrac{1}{1-p}, \dfrac{1}{1-p}\right[$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ sur $\mathbb{R}$.