Résumé du chapitre 14 : Espérance et variance

Dans tout le chapitre, on se place dans espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *et X est une variable aléatoire discrète et à valeurs réelles.*

I - Espérance

I-1. Définitions

Définition :

Si X est à valeurs dans un ensemble dénombrable $X(\Omega)=\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$, on dit que X est d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X=x_n)$ est absolument convergente. Si tel est le cas, on appelle espérance de X, notée $E(X)$, le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X=x_n)$.

Définition : (***HP***)

Sous réserve de convergence, le moment d'ordre r de X (avec $r\in\mathbb{N}^*$) est :

$$E(X^r)=\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x^r .$$

I-2. Propriétés de l'espérance

Propriété :

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie, alors $E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geq n)$.

Propriété : *Théorème du transfert*

Soient X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$ et f une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles. La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X=x_n)f(x_n)$ converge absolument et, dans ce cas, on a :

$$E\big(f(X)\big)=\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X=x_n) .$$

Propriétés :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles d'espérance finie.

- *Linéarité de l'espérance* : pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$.
- *Positivité de l'espérance* : si pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\geq 0$ alors $E(X)\geq 0$.
- *Croissance de l'espérance* : si pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\leq Y(\omega)$ alors $E(X)\leq E(Y)$.

Propriété :

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes et d'espérances finies, alors :

$$E(XY)=E(X)E(Y) .$$

Propriété : *Inégalité de Markov*

Si X est une variable aléatoire réelle d'espérance finie et positive sur Ω, alors pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

I-3. Espérance des lois usuelles

Propriété :

- Si X suit une loi uniforme avec $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$, alors $E(X) = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$.
- Si X suit une loi de Bernoulli avec $X(\Omega) = \{a, b\}$ et $P(X = a) = p$, alors $E(X) = pa + (1-p)b$.
- Si X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.
- Si X suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, alors $E(X) = \frac{1}{p}$.
- Si X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$.

II - Variance

II-1. Définition

Propriété :

Si X est à valeurs dans un ensemble dénombrable $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ et la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie et on a :

$$E\left(\left[X - E(X)\right]^2\right) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Définitions :

Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est $V(X) = E\left(\left[X - E(X)\right]^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$.

L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

II-2. Propriétés

Propriété :

Soit X est une variable aléatoire réelle admettant une variance finie.

Pour tous réels a et b, la variable aléatoire $aX + b$ admet une variance finie et on a :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Propriété : *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P\left(\left|X - E(X)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

II-3. Variance des lois usuelles

Propriété :

- Si X suit une loi de Bernoulli avec $X(\Omega)=\{a,b\}$ et $P(X=a)=p$, alors $V(X)=(b-a)^2 p(1-p)$.
- Si X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors $V(X)=np(1-p)$.
- Si X suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, alors $V(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$.
- Si X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, alors $V(X)=\lambda$.

II-4. Covariance

Dans cette partie, on considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y telles que X^2 et Y^2 soient d'espérance finie (donc X et Y aussi).

Définitions :

On appelle covariance de X et Y le réel :

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big].$$

On appelle coefficient de corrélation de X et Y le réel :

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Propriétés : (***non mentionnées dans le programme***)

- $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.
- La covariance est symétrique : $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$.
- La covariance est symétrique et bilinéaire : si X_1, X_2 et Y sont trois variables aléatoires réelles discrètes dont le carré est d'espérance finie, alors pour tous réels a et b, on a :
$$\operatorname{cov}(aX_1+bX_2,Y)=a\operatorname{cov}(X_1,Y)+b\operatorname{cov}(X_2,Y)$$
$$\operatorname{cov}(Y,aX_1+bX_2)=a\operatorname{cov}(Y,X_1)+b\operatorname{cov}(Y,X_2)$$
- Pour tous réels a et b, on a : $V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2ab\operatorname{cov}(X,Y)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

Propriété : *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

On a :

$$|E(XY)|\leq\sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}.$$

Et on a égalité si et seulement si X et Y sont proportionnelles avec probabilité de 1.

Corollaire : *Inégalité de Cauchy-Schwarz (bis)*

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et on a :

$$|\operatorname{cov}(X,Y)|\leq\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}=\sigma(X)\sigma(Y) \quad\text{et}\quad -1\leq\rho(X,Y)\leq 1.$$

Et on a égalité si et seulement si X et Y sont proportionnelles avec probabilité de 1.

Propriété :

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes telles que X_i^2 est d'espérance finie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

Et, si $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

II-5. Loi faible des grands nombres

Théorème : *Loi faible des grands nombres*

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors, en posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = E(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

III - Espérance, variance et fonction génératrice

III-1. Espérance et fonction génératrice

Propriété :

La variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1.

Si tel est le cas, on a alors :

$$E(X) = G_X'(1).$$

III-2. Variance et fonction génératrice

Propriété :

La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

Si tel est le cas, on a alors :

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2.$$