

TD du chapitre 11 : Intégrales à paramètre
Exercice 1

Soit $f \in C([0,1],\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t^n) dt$.

Après avoir justifié qu'elle est bien définie, déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2

Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente. Pour tout réel x , on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

Montrer que S est bien définie sur \mathbb{R} , que $I = \int_0^{+\infty} S(x)e^{-x} dx$ converge et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 3 (Deux techniques de calcul d'intégrale)

1) On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$.

a. Justifier que I est bien définie.

b. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} t e^{-(n+1)t}$.

c. Calculer $\int_0^{+\infty} t e^{-(n+1)t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire I .

2) On pose $J(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$.

a. Montrer que J est définie et de classe C^1 sur $] -1, +\infty[$ et donner J' .

b. En déduire $J(x)$ pour tout $x > -1$.

Exercice 4

Etudier $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2 + e^{-xt}}$.

Exercice 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt$.

1) Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x} dt$.

Montrer que $g(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et en déduire un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $h(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x} dt$.

Etudier $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ et en déduire un équivalent simple de $f(x)$ en 0.

Exercice 6 (Intégrale de Gauss)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$.

- 1) Montrer que pour tout F et G sont de classe C^1 sur \mathbb{R} et donner F' et G' .
- 2) Montrer que la fonction $F + G$ est constante sur \mathbb{R} .
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et en déduire l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
- 4) Calculer alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 7 (Transformée de Laplace)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R}_+ , et à valeurs dans \mathbb{C} .

Pour tout $f \in E$, on pose :

$$\mathcal{L}(f) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}; x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt.$$

- 1) Montrer que pour tout $f \in E$, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .
- 2) Soit $f \in E$, donner la limite de $\mathcal{L}(f)$ en $+\infty$.
- 3) Vérifier que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en une fonction g de E .
Calculer $\mathcal{L}(g)'$ et en déduire $\mathcal{L}(g)$.

Exercice 8 (Fonction gamma)

Pour tout réel $s > 0$, On pose $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$.

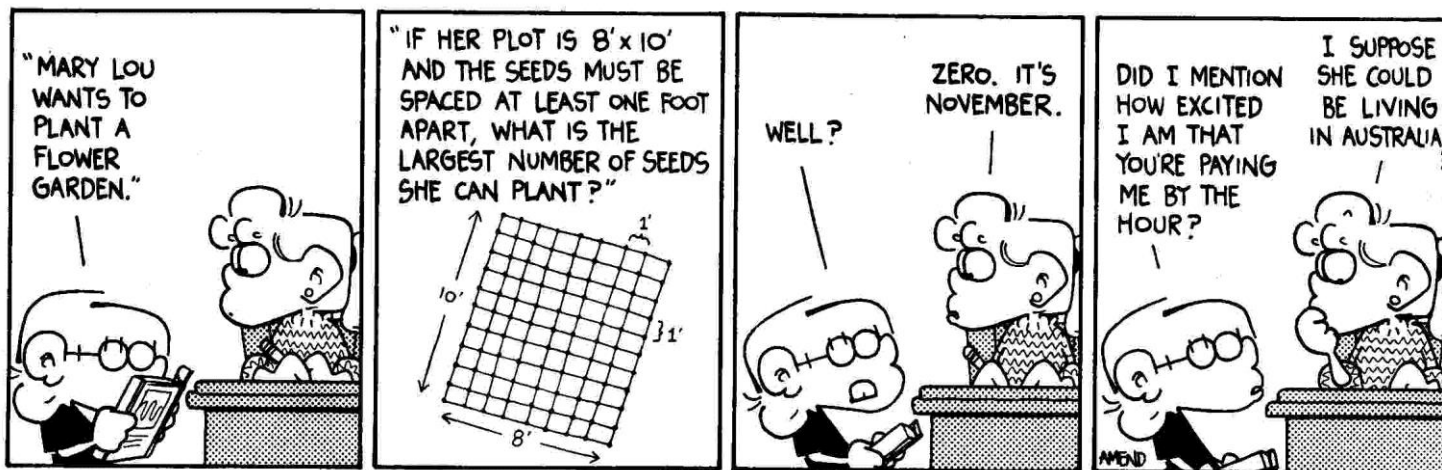
- 1) Montrer que Γ est bien définie sur \mathbb{R}_+^* et de classe C^∞ sur cet intervalle.
- 2) Prouver que pour tout réel $s > 0$, on a $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
- 3) Calculer $\Gamma(1)$, $\Gamma(m)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(1/2)$, $\Gamma(m+1/2)$ pour $m \in \mathbb{N}$.
- 4) Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$. Prouver que Γ' est croissante et en déduire les variations de Γ sur \mathbb{R}_+^* . Construire alors le tableau de variation complet de Γ . On donnera un équivalent simple de Γ en 0.
- 5) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; m]$, $\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq e^{-x}$. Montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}$.
- 6) Montrer que $\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1} dx = \frac{m! m^s}{s(s+1)\dots(s+m)}$, pour tout réel $s > 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

☺ On pourra procéder par intégrations par parties successives.

- 7) Montrer que pour tout réel $s > 0$, $\Gamma(s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m! m^s}{s(s+1)\dots(s+m)}$.

- 8) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \ln(\Gamma(t)) dt$. Donner la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$.

☺ On pourra utiliser $\varphi : x \mapsto \int_x^{x+1} \ln(\Gamma(t)) dt$.



Exercice 9 (Mines)

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \arctan\left(\frac{x}{t}\right) dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt$.

Exercice 10 (Centrale)

Soient $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, croissante et telle que $f(0) > 0$, et $\phi \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que ϕ' est décroissante et strictement positive, $\phi(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty$.

On suppose en outre qu'il existe un réel $t_0 \geq 0$ tel que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t_0\phi(x)} f(x) dx$ existe.

Pour tout réel $t \geq t_0$, on pose $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\phi(x)} f(x) dx$. On cherche un équivalent de F quand $t \rightarrow +\infty$.

- 1) Prouver que F est bien définie sur $[t_0, +\infty[$ et justifier que l'on peut se contenter d'étudier le cas où $t_0 = 0$.

Dans la suite, on suppose donc que $t_0 = 0$.

- 2) On suppose dans cette question que $\phi = id$.

a. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-t\phi(x)} f(x) dx = 0$, puis que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-t\phi(x)} f(x) dx = 0$.

b. En déduire que $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t}$.

- 3) Dans le cas général, montrer que $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t\phi'(0)}$.

☺ On utilisera un changement de variable que l'on justifiera.

