TD du chapitre 13 : Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X. Justifier.
2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   a. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer $P(Y=k \mid X=i)$.
   b. Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

☺ *On pourra utiliser l'égalité suivante* : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

Exercice 2

Deux lois de probabilités classiques (mais hors programme).

1) *Loi hypergéométrique* : Cette loi usuelle modélise le tirage sans remise de n boules dans une urne contenant N boules dont une proportion p de boules blanches (i.e. il y a Np boules blanches). On désigne par Ω l'ensemble des tirages possibles (supposés équiprobables) et par X le nombre de boules blanches dans un tirage donné.

   Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de X. On vérifiera que $P(X=k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

   Que devient $P(X=k)$ lorsque N tend vers l'infini (avec p et n fixés) ?

2) *Loi triangulaire* : Autre loi usuelle qui modélise la somme S de deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

   Déterminer la loi de S. Pourquoi l'appelle-t-on "loi triangulaire" ?

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$.

Quelle est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[\![2,2n]\!]$?

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et suivant une même loi.

En étudiant les racines de $G_{X_1}G_{X_2}$, montrer que X_1+X_2 ne peut pas suivre une loi uniforme sur $[\![2,2n]\!]$.

Exercice 4

Un parc d'attraction accueille chaque jour un nombre N variable de visiteurs qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1) Le parc dispose de 4 entrées, numérotées de 1 à 4. Chaque visiteur en choisit une au hasard et sans tenir compte du choix des autres visiteurs. X désigne le nombre de visiteurs par jour qui entrent par l'entrée n° 1.

   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire X sachant que $N = k$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   c. Soit n un entier naturel. Justifier que $P(X = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(N = k) P_{(N=k)}(X = n)$, puis en déduire que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

2) L'une des attractions du parc est un jeu consistant à lancer une balle dans un trou qui s'éloigne de plus en plus à chaque lancer, de telle sorte que :

   - le premier lancer est réussi de façon certaine ;
   - le second lancer est réussi une fois sur deux ;
   - lorsque les $n-1$ premiers lancers sont réussis, la probabilité de réussir le $n^{\text{ième}}$ lancer est de $1/n$;
   - le jeu s'arrête au premier échec.

   Si i est un entier naturel non nul, S_i désigne l'évènement « le $i^{\text{ème}}$ lancer est réussi » et Z est la variable aléatoire qui correspond au numéro du dernier lancer réussi.

   a. Quelles sont les valeurs prises par Z ?

   b. Soit n un entier naturel non nul donné. Exprimer l'évènement $(Z = n)$ en fonction des évènements S_i ou de leurs contraires. En déduire que $P(Z = n) = \dfrac{n}{(n+1)!}$.

   c. Vérifier que l'on a bien $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(Z = n) = 1$.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1) Calculer $P(X \geq m)$.
2) Déterminer les lois de $Z = \min(X, Y)$ et $W = X - Y$.
3) Prouver que les variables aléatoires W et Z sont indépendantes.

Exercice 6

On suppose qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $P(X \leq n) = \dfrac{1}{n!} u_n$ avec $u_n = \int_{\lambda}^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
2) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3) Soit G_X la fonction génératrice de X. Calculer $G_X(1)$ et $G_X(-1)$.
4) En déduire la probabilité que X prenne une valeur paire.
5) En s'inspirant des questions précédentes, déterminer la probabilité que la valeur de X soit divisible par 4.
6) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et suivant une loi uniforme sur $\{1;2\}$. Quelle est la probabilité pour que XY soit un entier pair ?

Exercice 7

Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique. Déterminer la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation $y'' + (A-1)y' + By = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 8 (*Mines*)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice g_X, définie sur $]-R_X, R_X[$ avec $R_X > 0$.

1) Montrer que pour $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, la fonction génératrice de $aX+b$ est définie sur $]-R_Y, R_Y[$, avec $R_Y = R_X^{1/a}$ (et $R_Y = +\infty$ quand $R_X = +\infty$), et l'exprimer en fonction de g_X.
2) Justifier que g_X est définie en -1 et 1.
3) Montrer que $P\left(X \text{ pair}\right) = \dfrac{g_X(1) + g_X(-1)}{2}$ et $P\left(X \text{ impair}\right) = \dfrac{g_X(1) - g_X(-1)}{2}$.
4) Applications si X suit une loi de Poisson, puis si X suit une loi binomiale.

Exercice 9 (*ENS*)

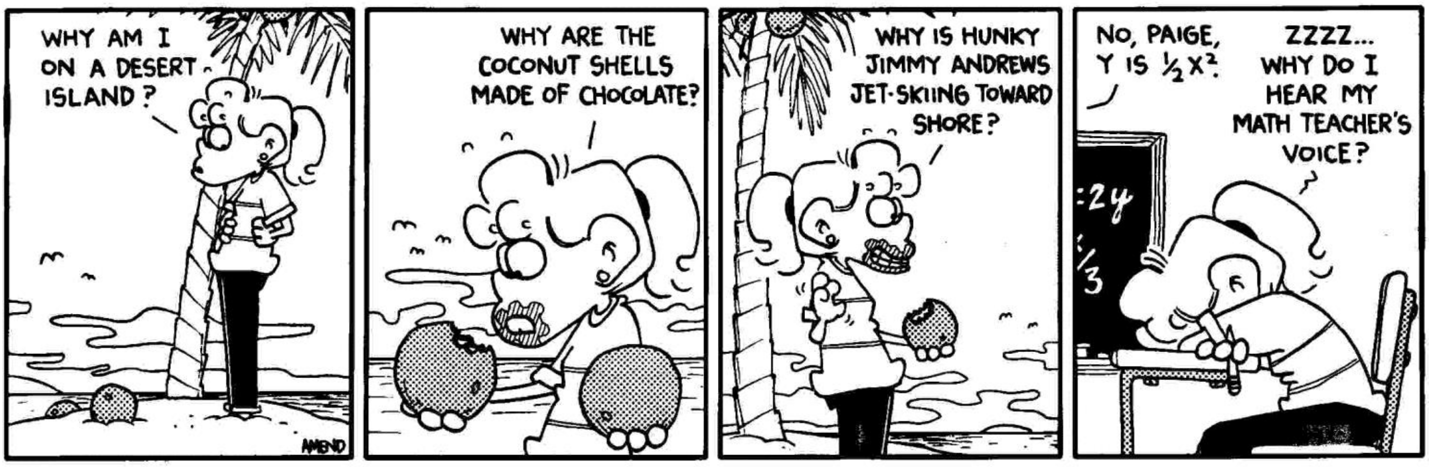
Soient X et X' deux variables aléatoires dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

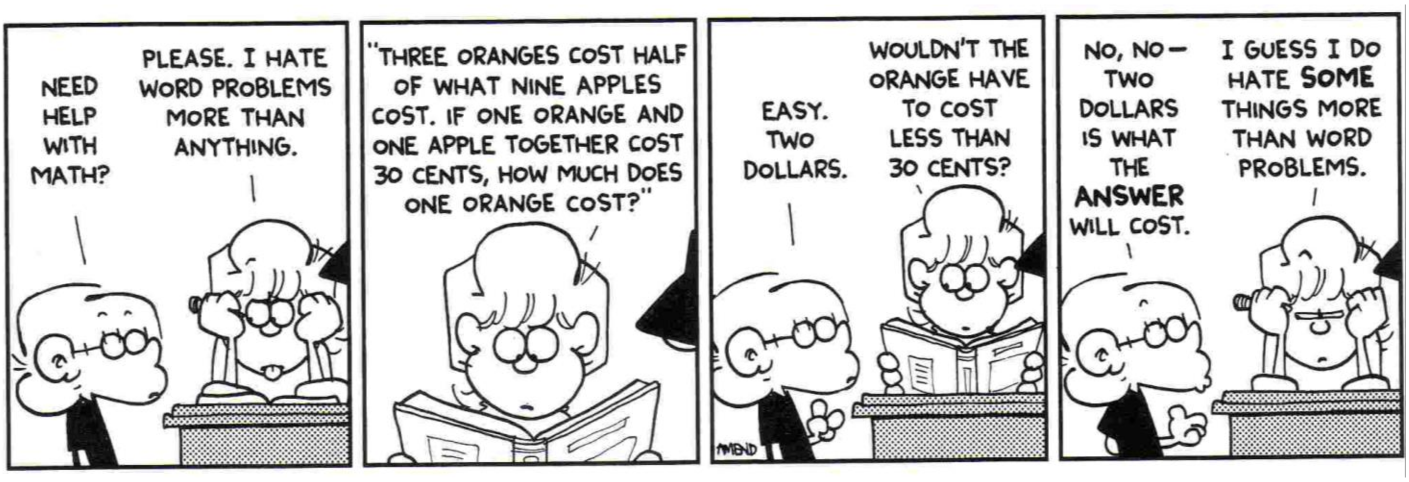
1) Montrer que pour tout $B \in \mathcal{A}$, $\left|P\left(X \in B\right) - P\left(X' \in B\right)\right| \leq 2P\left(X \neq X'\right)$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in [0,1]^n$ et $(Y_m, Y_m')_{m \in [\![1,n]\!]}$ des couples de variables aléatoires entières mutuellement indépendants tels que pour tout $m \in [\![1,n]\!]$:

$$P\left((Y_m, Y_m') = (i, i')\right) = \begin{cases} 1 - p_m & \text{si } i = 0 \text{ et } i' = 0 \\ 0 & \text{si } i = 0 \text{ et } i' \in \mathbb{N}^* \\ e^{-p_m} - (1 - p_m) & \text{si } i = 1 \text{ et } i' = 0 \\ \dfrac{e^{-p_m} p_m^{i'}}{i'!} & \text{si } i = 1 \text{ et } i' \in \mathbb{N}^* \\ a & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

2) Déterminer a et les lois de Y_m et Y_m' pour tout $m \in [\![1,n]\!]$. Y_m et Y_m' sont-elles indépendantes ?
3) Montrer que $P\left(\sum_{m=1}^{n} Y_m \neq \sum_{m=1}^{n} Y_m'\right) \leq \sum_{m=1}^{n} p_m^2$.


WHY AM I ON A DESERT ISLAND?
WHY ARE THE COCONUT SHELLS MADE OF CHOCOLATE?
WHY IS HUNKY JIMMY ANDREWS JET-SKIING TOWARD SHORE?
NO, PAIGE, Y IS ½ X².
ZZZZ... WHY DO I HEAR MY MATH TEACHER'S VOICE?


NEED HELP WITH MATH?
PLEASE. I HATE WORD PROBLEMS MORE THAN ANYTHING.
"THREE ORANGES COST HALF OF WHAT NINE APPLES COST. IF ONE ORANGE AND ONE APPLE TOGETHER COST 30 CENTS, HOW MUCH DOES ONE ORANGE COST?"
EASY. TWO DOLLARS.
WOULDN'T THE ORANGE HAVE TO COST LESS THAN 30 CENTS?
NO, NO— TWO DOLLARS IS WHAT THE ANSWER WILL COST.
I GUESS I DO HATE SOME THINGS MORE THAN WORD PROBLEMS.