Corrigé du DM n° 5

Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

Partie II

Q14. On a $M_n = \begin{pmatrix} 0_{n-1,1} & I_{n-1} \\ 1 & 0_{1,n-1} \end{pmatrix}$ et :

$$\boxed{M_n^2 = \begin{pmatrix} 0_{n-2,2} & I_{n-2} \\ I_2 & 0_{2,n-2} \end{pmatrix}, \dots, M_n^k = \begin{pmatrix} 0_{n-k,k} & I_{n-k} \\ I_k & 0_{k,n-k} \end{pmatrix}, \dots, M_n^n = I_n}$$

On a $M_n^n = M_n^{n-1} M_n = I_n$, donc :

$$\boxed{M_n \text{ est inversible d'inverse } M_n^{n-1}.}$$

Enfin, comme $M_n^n - I_n = 0_n$:

$$\boxed{\text{Un polynôme annulateur de } M_n \text{ est } X^n - 1.}$$

Q15. Le polynôme $X^n - 1$ est scindé à racines simples, les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité : les ω_n^k avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Donc, M_n admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{M_n \text{ est diagonalisable.}}$$

Le spectre de M_n est inclus dans l'ensemble des racines de $X^n - 1$ (qui annule M_n), soit :

$$Sp(M_n) \subset \left\{\omega_n^k, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $X = {}^t(x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$. On a :

$$M_n X = \omega_n^k X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \omega_n^k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = \omega_n^k x_1 \\ x_3 = \omega_n^k x_2 \\ \quad \vdots \\ x_n = \omega_n^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega_n^k x_n \end{cases}$$

La suite finie $(x_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est géométrique de raison ω_n^k, donc on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \omega_n^{(i-1)k} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)k} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, ω_n^k est bien valeur propre de M_n et donc :

$$\boxed{Sp(M_n)=\left\{\omega_n^k,\, k\in[\![0,n-1]\!]\right\}}$$

Et, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, si $X_k={}^t\left(1\ \ \omega_n^k\ \ \omega_n^{2k}\ \ldots\ \omega_n^{(n-1)k}\right)$, on a :

$$E_{\omega_n^k}=\ker\left(M_n-\omega_n^k I_n\right)=\mathrm{Vect}\left(X_k={}^t(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)\right).$$

Comme $M_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres distinctes :

$$\boxed{\text{La famille } \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) \text{ est une base de } \mathbb{C}^n \text{ constituée de vecteurs propres de } M_n.}$$

Q16. Notons $\mathcal{B}_c$ la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{B}=\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ avec $X_k={}^t\left(1\ \ \omega_n^k\ \ \omega_n^{2k}\ \ldots\ \omega_n^{(n-1)k}\right)$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$. On a $\Phi_n=\left(\omega_n^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\le i,j\le n}=\left(X_0\ \ X_1\ X_2\ \ldots\ X_{n-1}\right)$ où $\left(X_0\ \ X_1\ X_2\ \ldots\ X_{n-1}\right)$ est la matrice de la base $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}_c$, autrement dit la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$, soit :

$$\Phi_n=P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\Phi_n\in GL_n(\mathbb{C})}$$

De plus, on a pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $M_nX_k=\omega_n^kX_k$ et :

$$\boxed{\Phi_n^{-1}M_n\Phi_n=diag\left(1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\right)}$$

Q17. On a :

$$A=T\left(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\right)=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_{n-1} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=a_0I_n+a_1M_n+a_2M_n^{\,2}+\ldots+a_{n-1}M_n^{\,n-1}$$

avec $\left(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\right)\in\mathbb{C}^n$.

Ainsi :

$$\boxed{A=P(M_n)\ \text{ avec }\ P=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_{n-1}X^{n-1}.}$$

Q18. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On a vu que $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de M_n.

Notons alors $P = (X^n - 1)Q + R$ la division euclidienne de P par $X^n - 1$ avec $\deg R < n$.

On a alors :

$$P(M_n) = (M_n^n - I_n)Q(M_n) + R(M_n) = R(M_n).$$

Et $\deg R < n$, donc il existe $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $R = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$. Alors :

$$P(M_n) = R(M_n) = a_0 I_n + a_1 M_n + a_2 M_n^2 + \dots + a_{n-1} M_n^{n-1} = T\left(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{P(M_n) \text{ est une matrice circulante.}}$$

Q19. Notons $\mathrm{Cir}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble (non vide !) des matrices circulantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par définition, on a :

$$\underline{\mathrm{Cir}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})}.$$

Soient $A, B \in \mathrm{Cir}_n(\mathbb{C})$ avec :

$$A = T\left(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\right)$$
$$B = T\left(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\right)$$

et $\left(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\right) \in \mathbb{C}^{2n}$.

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$\lambda A + \mu B = \lambda \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 & b_1 & & b_{n-2} \\ \vdots & b_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_2 & & \ddots & b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_0 + \mu b_0 & \lambda a_1 + \mu b_1 & \cdots & \lambda a_{n-2} + \mu b_{n-2} & \lambda a_{n-1} + \mu b_{n-1} \\ \lambda a_{n-1} + \mu b_{n-1} & \lambda a_0 + \mu b_0 & \lambda a_1 + \mu b_1 & & \lambda a_{n-2} + \mu b_{n-2} \\ \vdots & \lambda a_{n-1} + \mu b_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_2 + \mu b_2 & & \ddots & \lambda a_0 + \mu b_0 & \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 & \lambda a_2 + \mu b_2 & \cdots & \lambda a_{n-1} + \mu b_{n-1} & \lambda a_0 + \mu b_0 \end{pmatrix}.$$

Donc, $\lambda A + \mu B \in \mathrm{Cir}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Cir}_n(\mathbb{C})$ est stable par combinaison linéaire. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Cir}_n(\mathbb{C}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}).}$$

On a $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i M_n^i = P(M_n)$ et $B = \sum_{j=0}^{n-1} b_j M_n^j = Q(M_n)$, donc :

$$AB = P(M_n)Q(M_n) = L(M_n)$$

avec $L = PQ \in \mathbb{C}[X]$.

Alors, $AB \in \mathrm{Cir}_n(\mathbb{C})$ d'après la question précédente et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Cir}_n(\mathbb{C}) \text{ est stable par produit.}}$$

Enfin :

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & & a_2 \\ \vdots & a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & & \ddots & a_0 & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = T\left(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1\right) \in \mathrm{Cir}_n(\mathbb{C}). $$

Donc :

$$ \boxed{\mathrm{Cir}_n(\mathbb{C}) \text{ est stable par transposition.}} $$

Q20. D'après les questions 17 et 18, on a $\mathrm{Cir}_n(\mathbb{C}) = \left\{P(M_n),\, P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\right\}$.

D'autre part, d'après la question 16, $\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n = diag\left(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}\right)$.

Alors, pour tout $A \in \mathrm{Cir}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A = P(M_n)$, et on a :

$$ \Phi_n^{-1} P(M_n) \Phi_n = P\left(\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n\right) = P\left(diag\left(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}\right)\right) = diag\left(P(1), P(\omega_n), P(\omega_n^2), \dots, P(\omega_n^{n-1})\right). $$

Donc, $A = P(M_n)$ est semblable à la matrice diagonale $diag\left(P(1), P(\omega_n), P(\omega_n^2), \dots, P(\omega_n^{n-1})\right)$ et ainsi :

$$ \boxed{\text{Toute matrice circulante est diagonalisable.}} $$

Le résultat précédent, prouve aussi que :

$$ \boxed{\begin{array}{l} \text{Les valeurs propres de } A = P(M_n) \text{ sont les } P(\omega_n^k) \text{, avec } k \in [\![0, n-1]\!], \\ \text{et } \mathcal{B} = \left(X_1, X_2, \dots, X_n\right) \text{ est une base de vecteurs propres.} \end{array}} $$

Partie III

Q21. On a :

(i) $\exists\, x_0 \in \mathbb{C}^n, \mathrm{Vect}\left(x_0, f_M(x_0), f_M^2(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0)\right) = \mathbb{C}^n$.

(ii) M est semblable à $C\left(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ avec $\left(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\right) \in \mathbb{C}^n$.

On veut : (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

(i) $\Rightarrow$ (ii) :

On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$, avec pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = f_M^{i-1}(x_0)$.

On a alors pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f_M(e_i) = f_M\left(f_M^{i-1}(x_0)\right) = f_M^i(x_0) = e_{i+1}$ et si on pose $f_M(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} e_i$, on a :

$$ M_{\mathcal{B}}(f_M) = C\left(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\right). $$

Ainsi, si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, $M = M_{\mathcal{B}_c}(f_M)$ et $M_{\mathcal{B}}(f_M)$ représentent le même endomorphisme dans deux bases de $\mathbb{C}^n$, donc :

$$\boxed{M \text{ et } M_{\mathcal{B}}(f_M) = C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \text{ sont semblables.}}$$

<u>(i) $\Leftarrow$ (ii)</u> :

On suppose que M est semblable à $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ avec $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

Ceci veut dire qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que :

$$M_{\mathcal{B}}(f_M) = C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a alors pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f_M(e_i) = e_{i+1}$.

En posant $x_0 = e_1$, on a $e_1 = x_0 = f_M^0(x_0)$ et si, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, $e_i = f_M^{i-1}(x_0)$, alors :

$$e_{i+1} = f_M(e_i) = f_M\left(f_M^{i-1}(x_0)\right) = f_M^i(x_0).$$

Ceci prouve par récurrence que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = f_M^{i-1}(x_0)$ et donc qu'il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n) = \left(x_0, f_M(x_0), f_M^2(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

Ainsi, on a bien (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

III.A.1)

Q22. Comme $\mathbb{C}^n$ est de dimension n, la famille de n vecteurs $\mathcal{F} = \left(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u)\right)$ est libre si et seulement si son rang est n, autrement dit et seulement si la matrice de $\mathcal{F}$ dans n'importe quelle base de $\mathbb{C}^n$, par exemple $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, est inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a $f_M(e_i) = \lambda_i e_i$, donc $f_M^0(e_i) = id_{\mathbb{C}^n}(e_i) = e_i = \lambda_i^0 e_i$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $f_M^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$, alors :

$$f_M^{k+1}(e_i) = f_M\left(f_M^k(e_i)\right) = f_M(\lambda_i^k e_i) = \lambda_i^k f_M(e_i) = \lambda_i^k(\lambda_i e_i) = \lambda_i^{k+1} e_i.$$

Ceci prouve par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $f_M^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$.

Alors, comme $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_M^k(u) = f_M^k\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i f_M^k(e_i) = \sum_{i=1}^n u_i \lambda_i^k e_i$ et donc :

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = M_{\mathcal{B}}\left(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u)\right) = \begin{pmatrix} u_1 & u_1\lambda_1 & \cdots & u_1\lambda_1^{n-1} \\ u_2 & u_2\lambda_2 & \cdots & u_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_n\lambda_n & \cdots & u_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det\left(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)=\det\begin{pmatrix} u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}\times\det\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}=\left(\prod_{i=1}^n u_i\right)\times\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Donc :

$$\det\left(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \prod_{i=1}^n u_i\neq 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Le dernier déterminant est un déterminant de Vandermonde, qui est non nul si et seulement si les λ_i sont distincts deux à deux. Ainsi :

$$\det\left(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j,\ u_i\neq 0 \text{ et } \lambda_i\neq\lambda_j.$$

Finalement :

$\boxed{\text{La famille } \left(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u)\right) \text{ est une base de } \mathbb{C}^n \text{ si et seulement si, pour tous } i,j\in[\![1,n]\!],\ u_i\neq 0 \text{ et } \lambda_i\neq\lambda_j \text{ quand } i\neq j.}$

Q23. On garde les notations de la question précédente.

Par définition, f_M est cyclique s'il existe $u=\sum_{i=1}^n u_i e_i\in\mathbb{C}^n$ tel que $\left(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u)\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

Or, ceci est le cas si et seulement si tous les u_i sont non nuls et, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ tels que $i\neq j$, $\lambda_i\neq\lambda_j$.

Ainsi, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ tels que $i\neq j$, $\lambda_i\neq\lambda_j$, alors, pour tout vecteur $u=\sum_{i=1}^n u_i e_i\in\mathbb{C}^n$ tel que $u_i\neq 0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\left(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u)\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

Et réciproquement, si $\left(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u)\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$, alors pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ tels que $i\neq j$, on a $\lambda_i\neq\lambda_j$.

Finalement :

$\boxed{\text{Un endomorphisme diagonalisable de } \mathbb{C}^n \text{ est cyclique si et seulement s'il admet } n \text{ valeurs propres distinctes.}}$

De plus, d'après ce qui précède :

$\boxed{u\in\mathbb{C}^n \text{ est cyclique s si ses coordonnées dans une base de vecteurs propres sont toutes non nulles.}}$

III.A.2)

Q24. Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ et $\lambda\in\mathbb{C}$. On a :

$$C(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})X=\lambda X \iff \begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&a_0\\1&0&&\vdots&a_1\\0&1&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0&a_{n-2}\\0&\cdots&0&1&a_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \iff \begin{cases}a_0x_n=\lambda x_1\\x_1+a_1x_n=\lambda x_2\\\quad\vdots\\x_{n-1}+a_{n-1}x_n=\lambda x_n\end{cases}$$

Et on a :

$$\begin{cases}a_0x_n=\lambda x_1\\x_1+a_1x_n=\lambda x_2\\\quad\vdots\\x_{n-2}+a_{n-2}x_n=\lambda x_{n-1}\\x_{n-1}+a_{n-1}x_n=\lambda x_n\end{cases}\iff\begin{cases}a_0x_n=\lambda x_1\\x_1=\lambda x_2-a_1x_n\\\quad\vdots\\x_{n-2}=\lambda x_{n-1}-a_{n-2}x_n\\x_{n-1}=\lambda x_n-a_{n-1}x_n\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda x_1=a_0x_n\\\lambda x_2-x_1=a_1x_n\\\quad\vdots\\\lambda x_{n-1}-x_{n-2}=a_{n-2}x_n\\\lambda x_n-x_{n-1}=a_{n-1}x_n\end{cases}$$

En effectuant $L_i=L_i+\lambda L_{i+1}$ pour $i=n-1,n-2,\dots,2,1$ *successivement*, le système ci-dessus équivaut à :

$$\begin{cases}\left(\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-\dots-a_2\lambda^2-a_1\lambda-a_0\right)x_n=0\\x_1=\left(\lambda^{n-1}-a_{n-1}\lambda^{n-2}-\dots-a_2\lambda-a_1\right)x_n\\\quad\vdots\\x_{n-2}=\left(\lambda^2-a_{n-1}\lambda-a_{n-2}\right)x_n\\x_{n-1}=\left(\lambda-a_{n-1}\right)x_n\end{cases}$$

La première équation du dernier système donne $x_n=0$ ou $\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-\dots-a_2\lambda^2-a_1\lambda-a_0=0$. Or, si $x_n=0$, alors $X=0$, donc le système $C(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})X=\lambda X$ admet une solution non nulle si et seulement si $\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-\dots-a_2\lambda^2-a_1\lambda-a_0=0$. Autrement dit :

λ est valeur propre de $C(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$ si et seulement s'il est racine de $X^n-a_{n-1}X^{n-1}-\dots-a_1X-a_0$.

Q25. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. On vient de voir que si $\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-\dots-a_2\lambda^2-a_1\lambda-a_0=0$, alors le système $C(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})X=\lambda X$ admet pour solution $X=x_n\begin{pmatrix}\lambda^{n-1}-a_{n-1}\lambda^{n-2}-\dots-a_2\lambda-a_1\\\lambda^{n-2}-a_{n-1}\lambda^{n-3}-\dots-a_2\\\vdots\\\lambda-a_{n-1}\\1\end{pmatrix}$, donc :

Si λ est une valeur propre de $C(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$, donc une racine de $X^n-a_{n-1}X^{n-1}-\dots-a_1X-a_0$, le sous-espace propre associé à λ est la droite $\mathrm{Vect}(X_\lambda)$ avec $X_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda^{n-1}-a_{n-1}\lambda^{n-2}-\dots-a_2\lambda-a_1\\\lambda^{n-2}-a_{n-1}\lambda^{n-3}-\dots-a_2\\\vdots\\\lambda-a_{n-1}\\1\end{pmatrix}$.

Q26. Soit f un endomorphisme cyclique de $\mathbb{C}^n$. Il existe alors $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de f est $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.

D'après ce qui précède les valeurs propres de $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, donc de f, sont les racines du polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1 X - a_0$ et les sous-espaces propres sont des droites.

Or, f est diagonalisable si et seulement si la somme directe de ses sous-espaces propres est $\mathbb{C}^n$, ce qui revient à la somme des dimensions de ses sous-espaces propres $\mathbb{C}^n$ égale à n. Or, comme ici les sous-espaces propres sont des droites, cette somme est égale au nombre de sous-espaces propres, donc au nombre de racines distinctes de P.

Finalement :

$$\boxed{\text{Un endomorphisme cyclique de } \mathbb{C}^n \text{ est diagonalisable si et seulement s'il admet } n \text{ valeurs propres distinctes.}}$$

III.A.3) On a $C(f_M) = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n),\ gf_M = f_M g\}$.

Q27. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On a :

$$f_M P(f_M) = f_M\left(\sum_{k=0}^{d} a_k f_M^k\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k f_M^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k f_M^k\right) f_M = P(f_M) f_M .$$

Donc, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{P(f_M) \in C(f_M)}$$

Q28. Comme f_M est cyclique, il existe $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\left(x_0, f_M(x_0), f_M^2(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

Soit $g \in C(f_M)$. Il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(x_0)$ et pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_M^{i-1}(x_0) \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} g(x) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_M^{i-1}(x_0)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i g\left(f_M^{i-1}(x_0)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_M^{i-1}\left(g(x_0)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_M^{i-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(x_0)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_i \alpha_k f_M^{i-1+k}(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_k x_i f_M^{k+i-1}(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_M^{i-1}(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $g(x) = P(f_M)(x)$ avec $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$, donc $g = P(f_M)$ et finalement :

$$\boxed{\text{Il existe } (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } g = P(f_M) \text{ avec } P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k .}$$

Q29. D'après la question 27, on a $\{P(f_M), P \in \mathbb{C}[X]\} \subset C(f_M)$ et d'après a question précédente, on a $C(f_M) \subset \{P(f_M), P \in \mathbb{C}[X]\}$, donc :

$$\boxed{C(f_M) = \{P(f_M), P \in \mathbb{C}[X]\}}$$

III.A.4) Notons $\mathcal{B}_c = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice N.

Q30. La matrice N est triangulaire inférieure et tous ses coefficients diagonaux sont nuls, donc son polynôme caractéristique est $\chi_N = X^n$ et la seule valeur propre éventuelle de N est 0. Comme $u(\varepsilon_n) = 0$, 0 est bien valeur propre de N. Enfin, $\operatorname{Im} N = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, donc $rg\,(N) = n-1$ et d'après le théorème du rang, le noyau de N est de dimension 1. Ainsi, $\ker N = \operatorname{Vect}(\varepsilon_n)$. Finalement :

$$\boxed{\text{La seule valeur propre de } N \text{ est 0, de sous-espace propre associé } \ker N = \operatorname{Vect}(\varepsilon_n).}$$

Il découle immédiatement que :

$$\boxed{N \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Ce n'est pas un scoop car N est nilpotente ($\chi_N(N) = N^n = 0_n$) et non nulle.

Q31. On a pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $u(\varepsilon_k) = \varepsilon_{k+1}$, donc $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$ et si, pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, $u^{k-1}(\varepsilon_1) = \varepsilon_k$ alors :

$u^k(\varepsilon_1) = u\left(u^{k-1}(\varepsilon_1)\right) = u(\varepsilon_k) = \varepsilon_{k+1}$.

Ceci prouve par récurrence que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\varepsilon_k = u^{k-1}(\varepsilon_1)$.

Alors, $\mathcal{B}_c = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \left(\varepsilon_1, f_M(\varepsilon_1), \dots, f_M^{n-1}(\varepsilon_1)\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$, donc, par définition, u est cyclique, et donc :

$$\boxed{N \text{ est cyclique.}}$$

Q32. Posons $C(N) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AN = NA\}$ et appelons $\mathcal{T}_i$ l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures, autrement dit l'ensemble des matrices de la forme :

$$T\left(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0\right) = \begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t_{-1} & t_0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & 0 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}.$$

Soit $T\left(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0\right) \in \mathcal{T}_i$. On a :

$$T\left(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0\right)N = NT\left(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t_0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ t_{-1} & t_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & t_0 & 0 & 0 \\ t_{-n+2} & \cdots & \cdots & t_{-1} & t_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, $T\left(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0\right) \in C(N)$ et ainsi :

$$\underline{\mathcal{T}_i \subset C(N).}$$

Soit $A \in C(N)$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.

On a $AN = NA$, donc $vu = uv$ et ainsi, $v \in C(u)$. Or, u est cyclique, donc d'après la question 29, on a $C(u) = \{P(u), P \in \mathbb{C}[X]\}$, donc il existe $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que $v = P(u)$, soit $A = P(N)$.

Or, on a pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $N^k = \begin{pmatrix} 0_{k,n-k} & 0_k \\ I_{n-k} & 0_{n-k,k} \end{pmatrix}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq n$, on a $N^k = N^n = 0_n$.

Donc :

$$A = P(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N^k = a_0 I_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \begin{pmatrix} 0_{k,n-k} & 0_k \\ I_{n-k} & 0_{n-k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_i .$$

Donc, pour tout $A \in C(N)$, $A \in \mathcal{T}_i$ et ainsi :

$$\underline{C(N) \subset \mathcal{T}_i}.$$

Finalement, $C(N) = \mathcal{T}_i$, autrement dit :

L'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.