Corrigé du DM n° 6

Partie III

On prend $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{C}$.

Q21. On a $\deg A_0=0$ et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\deg A_k=\deg X+\deg\left((X-ka)^{k-1}\right)=1+k-1=k$. Ainsi, la famille $\left(A_0,A_1,\dots,A_n\right)$ est une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes non nuls de $\mathbb{C}_n[X]$, donc :

$$\boxed{\left(A_0,A_1,\dots,A_n\right) \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X].}$$

Q22. On a $A_1'(X)=\left[X\right]'=1=A_0(X-a)$ et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, tel que $k\geq 2$ (avec alors $n\geq 2$) :

$$\begin{aligned}
A_k'(X)&=\left[\frac{1}{k!}X(X-ka)^{k-1}\right]'=\frac{1}{k!}\left[(X-ka)^{k-1}+(k-1)X(X-ka)^{k-2}\right]\\
&=\frac{1}{k!}\left[(X-ka)+(k-1)X\right](X-ka)^{k-2}=\frac{1}{k!}\left[k(X-a)\right](X-ka)^{k-2}\\
&=\frac{1}{(k-1)!}(X-a)(X-ka)^{k-2}
\end{aligned}$$

Et :

$$A_{k-1}(X-a)=\frac{1}{(k-1)!}(X-a)\left((X-a)-(k-1)a\right)^{k-2}=\frac{1}{(k-1)!}(X-a)(X-ka)^{k-2}.$$

Donc, on a bien pour tout $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\boxed{A_k'(X)=A_{k-1}(X-a)}$$

Q23. Soient $k,j\in[\![0,n]\!]$. Comme $\deg A_k=k$, on a $A_k^{(j)}=0$, $A_k^{(j)}(ja)=0$, si $j>k$.

Par ailleurs, d'après la question précédente, on a $A_k'(X)=A_{k-1}(X-a)$, donc :

$$A_k''(X)=A_{k-1}'(X-a)=A_{k-2}\left((X-a)-a\right)=A_{k-2}(X-2a).$$

En continuant, on conjecture que pour tout $\ell\in[\![0,k]\!]$, $A_k^{(\ell)}(X)=A_{k-\ell}(X-\ell a)$.

- Ceci est vrai pour $\ell=0$: $A_k^{(0)}(X)=A_k(X)=A_{k-0}(X-0a)$.
- Si la formule est vraie à un rang $\ell\in[\![0,k-1]\!]$ (quand $k\geq 1$), on a par hypothèse de récurrence :

  $$A_k^{(\ell+1)}(X)=\left[A_{k-\ell}(X-\ell a)\right]'=A_{k-\ell}'(X-\ell a).$$

  Or, $\ell\in[\![0,k-1]\!]$ donc $k-\ell\in[\![1,k]\!]$ et on peut utiliser la question précédente, donc :

  $$A_k^{(\ell+1)}(X)=A_{k-\ell}'(X-\ell a)=A_{k-\ell-1}\left((X-\ell a)-a\right)=A_{k-(\ell+1)}\left(X-(\ell+1)a\right).$$

  La formule est vraie au rang $\ell+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $\ell\in[\![0,k]\!]$.

Alors, quand $j \leq k$, soit $j \in [\![0,k]\!]$, on a :

$$A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(ja - ja) = A_{k-j}(0) = \begin{cases} 1 \text{ quand } j = k \\ 0 \text{ quand } j < k \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Pour tous } k, j \in [\![0,n]\!],\ A_k^{(j)}(ja) = \delta_{k,j} \text{ où } \delta_{k,j} \text{ est le symbole de Kronecker.}}$$

Q24. On a $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$, donc pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \delta_{k,j}$, soit :

$$\boxed{P^{(j)}(ja) = \alpha_j}$$

Q25. On a vu dans la question **Q21** que $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$. Or, on vient d'établir que $\alpha_j = P^{(j)}(ja)$ pour tout $j \in [\![0,n]\!]$.

Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$:

$$P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(ka) A_k .$$

Pour $y \in \mathbb{C}$, appliquons cela à $P = (X+y)^n$.

On a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}(X+y)^{n-k}$, donc $P^{(k)}(ka) = \dfrac{n!}{(n-k)!}(ka+y)^{n-k}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(X+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(ka) A_k \\
&= y^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(ka+y)^{n-k} \frac{1}{k!} X(X-ka)^{k-1} \\
&= y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (y+ka)^{n-k} X(X-ka)^{k-1}
\end{aligned}$$

Et en évaluant en $x \in \mathbb{C}$, on obtient pour tout $(a,x,y) \in \mathbb{C}^3$:

$$\boxed{(x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}}$$

Q26. On peut alors écrire pour tout $(a,y) \in \mathbb{C}^2$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{(x+y)^n - y^n}{x} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k} \qquad \textbf{(*)}$$

Et $x \mapsto (x+y)^n$ est polynomiale en *x*, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto n(x+y)^{n-1}$. En particulier :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+y)^n - y^n}{x} = n y^{n-1}.$$

En passant alors à la limite quand $x \to 0$ dans la relation (*), on obtient par continuité de la fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$, pour tout $(a, y) \in \mathbb{C}^2$:

$$\boxed{n y^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}}$$

Q27. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(-n)^{n-1}}{n!}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $a_n \neq 0$ et :

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{\dfrac{(n+1)^n}{(n+1)!}}{\dfrac{n^{n-1}}{n!}}|x| = \frac{(n+1)^n n!}{n^{n-1}(n+1)!}|x| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n}{n+1}|x| = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \frac{n}{n+1}|x|.$$

Or, $\dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = n\left[\dfrac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right] = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$, donc :

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} e|x|.$$

D'après la règle de d'Alembert, $\sum a_n x^n$ converge quand $e|x|<1$, soit $|x| < \dfrac{1}{e}$, et diverge quand $e|x|>1$, soit $|x| > \dfrac{1}{e}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de de la série entière } \sum a_n x^n \text{ est } R = \frac{1}{e}.}$$

Q28. La fonction S est la somme d'une série entière réelle. Or, la somme d'une série entière réelle est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \left]-R\,;R\right[= \left]-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right[.}$$

De plus, pour tout $x \in \left]-R\,;R\right[$, $S(x)$ est égal à son développement en série de Taylor en 0, soit :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{S^{(n)}(0)}{n!} = a_n = \dfrac{(-n)^{n-1}}{n!}$, soit :

$$\boxed{S^{(n)}(0) = (-n)^{n-1}}$$

Q29. Avec la formule de Stirling, on a :

$$|a_n|R^n = \frac{n^{n-1}}{n!}\frac{1}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{n-1}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^n}.$$

Soit $|a_n|R^n \underset{n\to+\infty}{=\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,n^{1,5}}$. Or, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1,5}}$ converge (car $1,5>1$), donc $\sum |a_n|R^n$ converge.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sup_{x\in[-R;R]}|a_n x^n| = |a_n|R^n$ donc, si on note $f_n : x\mapsto a_n x^n$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[-R;R]$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues (car polynomiales) sur $[-R;R]$, la somme $S=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[-R;R]$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est définie et continue sur } [-R;R].}$$

Q30. La fonction S est dérivable sur $]-R;R[$ (d'après **Q28**) et pour tout $x\in\,]-R;R[$, $S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n x^{n-1}$.

Si on pose $a_0=1$, on a alors pour tout $x\in\,]-R;R[$:

$$1+S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad xS'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n x^n.$$

En effectuant le produit de Cauchy de ces deux séries entière de même rayon de convergence R, on obtient pour tout $x\in\,]-R;R[$, $xS'(x)\big(1+S(x)\big)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n=\sum_{k=0}^{n} k\,a_k a_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(n-k)\,a_{n-k}a_k$, soit $b_0=0$, $b_1=a_1=1$ et pour tout $n\geq 2$:

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n}(n-k)\,a_{n-k}a_k = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\frac{\big(-(n-k)\big)^{n-k-1}}{(n-k)!}\frac{(-k)^{k-1}}{k!}+n\,a_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^n (n-k)^{n-k}k^{k-1}}{k!(n-k)!}+n\frac{(-n)^{n-1}}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k}+n\frac{(-n)^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

Or, avec $y=n$ et $a=-1$, la formule de la question **Q26** donne :

$$\begin{aligned} n\,n^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k} \quad &\Leftrightarrow \quad n^n = n^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k} \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k} = n^n-n^{n-1}=(n-1)n^{n-1} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n\geq 2$:

$$b_n=\frac{(-1)^n}{n!}(n-1)n^{n-1}+n\frac{(-n)^{n-1}}{n!}=\frac{(-n)^{n-1}}{n!}\big[-(n-1)+n\big]=\frac{(-n)^{n-1}}{n!}=a_n.$$

Ainsi, obtient pour tout $x\in\,]-R;R[$, $xS'(x)\big(1+S(x)\big)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ soit :

$$\boxed{xS'(x)\big(1+S(x)\big)=S(x)}$$

Q31. La fonction $h = Se^S$ est dérivable sur $]-R;R[$ comme produit de telles fonctions et, avec la question précédente, on a pour tout $x \in]-R;R[$:

$$xh'(x) = x\left(S'(x)e^{S(x)} + S(x)\left[S'(x)e^{S(x)}\right]\right) = xS'(x)\left(1+S(x)\right)e^{S(x)} = S(x)e^{S(x)} = h(x).$$

Ainsi :

> La fonction h est solution de $xy' - y = 0$ sur $]-R;R[$.

Q32. Soit $I =]-R;0[$ ou $]0;R[$ et *f* une éventuelle solution de $xy' - y = 0$ sur *I*.

Comme *I* ne contient pas 0, on peut écrire en posant $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour tout $x \in I$:

$$xf'(x) - f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = g'(x) = 0.$$

Donc, g est constante, autrement dit, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = K$. La fonction *f* est alors linéaire sur *I* et, réciproquement, toute fonction linéaire ($x \mapsto Kx$) est solution de $xy' - y = 0$ sur *I*.

Ainsi :

> Les solutions de $xy' - y = 0$ sur $I =]-R;0[$ ou $]0;R[$ sont les fonctions linéaires sur *I*.

Remarquons que, de même, toute fonction linéaire est solution de $xy' - y = 0$ sur $]-R;R[$.

Soit maintenant une solution *f* de $xy' - y = 0$ sur $]-R;R[$.

- *f* est solution de $xy' - y = 0$ sur $]-R;0[$, il existe $K_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-R;0[$, $f(x) = K_1 x$.
- *f* est solution de $xy' - y = 0$ sur $]0;R[$, il existe $K_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0;R[$, $f(x) = K_2 x$.

De plus, f est dérivable (donc continue) sur $]-R;R[$, et en particulier en 0. Alors :

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$;
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = K_1 = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = K_2 = f'(0)$.

Ainsi, en posant $K = K_1 = K_2$, on a $f(x) = Kx$ pour tout $x \in]-R;R[$, et donc *f* est linéaire sur $]-R;R[$.

Finalement :

> Les solutions de $xy' - y = 0$ sur $]-R;R[$ sont les fonctions linéaires sur cet intervalle.

Q33. D'après **Q31**, la fonction *h* est solution de $xy' - y = 0$ sur $]-R;R[$ donc, d'après **Q32**, *h* est linéaire sur cet intervalle. Autrement, dit il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-R;R[$, $h(x) = Kx$.

Alors, $K = h'(0) = S'(0)\left(1+S(0)\right)e^{S(0)}$ et, comme $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, on a $S(0) = 0$ et $S'(0) = a_1 = 1$, donc $K = 1$.

Ainsi, pour tout $x \in \left]-R;R\right[$, $h(x) = S(x)e^{S(x)} = x$. Avec la fonction *f* de la **partie I**, on obtient :

$$f\left(S(x)\right) = x.$$

Or, d'après la question **Q9** de la **partie I** :

$$f\left(S(x)\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} S(x) = W(x) & \text{quand } x \geq 0 \\ S(x) = V(x) \text{ ou } W(x) & \text{quand } x \in \left[-e^{-1};0\right[\end{cases}$$

De plus, pour tout $x \in \left]-e^{-1};0\right[$, $V(x) < -1$ et $W(x) > -1$.

Ainsi, pour tout $x \in \left[0;e^{-1}\right[$, $S(x) = W(x)$ et quand $x \in \left]-e^{-1};0\right[$, $S(x) = W(x)$ si et seulement si $S(x) > -1$.

Prouvons alors que c'est le cas, c'est-à-dire que pour tout $x \in \left]-e^{-1};0\right[$, $S(x) > -1$.

Pour tout $x \in \left]-e^{-1};0\right[$, on a :

- $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}\left(-|x|\right)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}|x|^n < 0$;
- $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(-n)^{n-1}}{n!}\left(-|x|\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}|x|^{n-1} > 0$, donc $x\,S'(x) < 0$.

Alors, $xS'(x) \neq 0$ et le résultat de la question **Q30** donne :

$$1 + S(x) = \frac{S(x)}{xS'(x)} > 0.$$

Ainsi, on a bien pour tout $x \in \left]-e^{-1};0\right[$, $S(x) > -1$ et donc $S(x) = W(x)$.

Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{S(x) = W(x) \text{ pour tout } x \in \left]-R;R\right[.}$$

Q34. On a vu que la fonction *S* est définie et continue sur $\left[-R;R\right] = \left[-e^{-1};e^{-1}\right]$. Or, d'après la **partie I**, la fonction *W* est définie et continue sur $\left[-e^{-1};+\infty\right[$, donc sur $\left[-e^{-1};e^{-1}\right]$. Alors, comme *S* et *W* coïncident sur $\left]-R;R\right[$ et sont toutes deux continues en $-R$ et R :

$$\boxed{S(x) = W(x) \text{ pour tout } x \in \left[-R;R\right].}$$