Corrigés des TD du chapitre 15

Exercice 1

1) L'application $\varphi:(P,Q)\mapsto (P\mid Q)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)Q(a_k)$ est bien définie sur $\left(\mathbb{R}_n[X]\right)^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Elle est clairement symétrique (commutativité du produit dans $\mathbb{R}$) et bilinéaire (distributivité du produit sur l'addition dans $\mathbb{R}$).

De plus, pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P\mid P)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)^2\geq 0$, donc φ est positive et donc, φ est produit scalaire si et seulement si φ est définie. Or, on a :

$$(P\mid P)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad P(a_0)=P(a_1)=\ldots=P(a_n)=0\,.$$

Donc, $a_0,a_1,\ldots,a_n$ sont racines de *P*. Si les a_k sont distincts deux à deux, alors $P\in\mathbb{R}_n[X]$ possède $n+1$ racine distincts, donc *P* est nul. Dans ce cas, φ est définie.

Par contre, si les a_k ne sont pas distincts deux à deux, quitte à renuméroter, on peut supposer que $a_0=a_1$, et dans ce cas, avec $P=\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $(P\mid P)=0$ avec $P\neq 0$, donc φ n'est pas définie.

Finalement, φ est définie si et seulement si les a_k sont distincts deux à deux, et donc :

$\boxed{(P,Q)\mapsto (P\mid Q)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)Q(a_k)\text{ est produit scalaire si et seulement si les } a_k \text{ sont distincts deux à deux.}}$

2) Remarquons que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ et tout $i\in[\![0,n]\!]$, $L_i(a_k)=\delta_{i,k}$ (le symbole de Kronecker).

On a pour tous $i,j\in[\![0,n]\!]$:

$$(L_i\mid L_j)=\sum_{k=0}^{n}L_i(a_k)L_j(a_k)=\sum_{k=0}^{n}\delta_{i,k}\delta_{j,k}=\delta_{i,j}\,.$$

Donc, la famille $(L_0,L_1,\ldots,L_n)$ est orthonormée et comme elle contient $n+1=\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right)$ polynômes :

$\boxed{\text{La famille } (L_0,L_1,\ldots,L_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X].}$

3) Remarquons déjà que pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\sum_{k=0}^{n}P(a_k)^2=\|P\|^2$ (où $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire utilisé ici), donc $\inf_{P\in F}\left(\sum_{k=0}^{n}P(a_k)^2\right)=\inf_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)$.

Par ailleurs, si on pose $L=L_0+L_1+\ldots+L_n$, on a pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$:

$$\sum_{k=0}^{n}P(a_k)=\sum_{k=0}^{n}L(a_k)P(a_k)=(L\mid P)\,.$$

Donc, $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus(L\mid P)=1\}$. Mais, $(L\mid L)=n+1$, soit $\left(L\,\middle|\,\frac{1}{n+1}L\right)=1$ (donc $\frac{1}{n+1}L\in F$) et :

$$F=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus(L\mid P)=\left(L\,\middle|\,\frac{1}{n+1}L\right)\right\}=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus\left(L\,\middle|\,P-\frac{1}{n+1}L\right)=0\right\}=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus L\perp P-\frac{1}{n+1}L\right\}$$

Alors, pour tout $P\in F$, on a $L\perp P-\frac{1}{n+1}L$, donc $\frac{1}{n+1}L\perp P-\frac{1}{n+1}L$ et, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|P\|^2=\left\|\frac{1}{n+1}L+P-\frac{1}{n+1}L\right\|^2=\left\|\frac{1}{n+1}L\right\|^2+\left\|P-\frac{1}{n+1}L\right\|^2\geq\left\|\frac{1}{n+1}L\right\|^2=\frac{1}{n+1}\quad\Rightarrow\quad\inf_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)\geq\frac{1}{n+1}.$$

Or, $\frac{1}{n+1}L\in F$, donc $\inf_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)\leq\frac{1}{n+1}$ et finalement :

$$\boxed{\inf_{P\in F}\left(\sum_{k=0}^{n}P(a_k)^2\right)=\inf_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)=\min_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)=\frac{1}{n+1}}$$

Exercice 2

1) On a :

- $(\cdot\mid\cdot)$ est clairement symétrique et bilinéaire du fait de la linéarité de l'intégrale.
- De plus, pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $(P\mid P)=\int_{-1}^{1}P^2\varphi$.

  Or, φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $P^2\varphi\geq 0$ sur $[-1;1]$ et par positivité de l'intégrale, on a $(P\mid P)\geq 0$ donc $(\cdot\mid\cdot)$ est positive.
- On a :

$$\begin{aligned}(P\mid P)=\int_{-1}^{1}P^2\varphi=0\quad&\Leftrightarrow\quad P^2\varphi=0 \text{ sur } [-1;1] \text{ (car } P^2\varphi \text{ est continue et positive sur } [-1;1])\\ &\Leftrightarrow\quad P=0 \text{ sur } [-1;1] \text{ (car } \varphi \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+^* \text{ donc ne s'annule pas)}\\ &\Leftrightarrow\quad P=0 \text{ (car P admet une infinité de racines donc est nul)}\end{aligned}$$

  Ainsi, $(\cdot\mid\cdot)$ est définie.

Finalement :

$$\boxed{(\cdot\mid\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2) Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de *E* permet de construire une base orthonormée $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ telle que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $P_k=\frac{R_k}{\|R_k\|}$ avec $R_0=1$ et pour tout $k\geq 1$, $R_k=X^k-(X^k\mid P_{k-1})P_{k-1}-\dots-(X^k\mid P_0)P_0$.

Alors, par construction, le terme de plus haut degré de R_k est X^k, donc pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\deg P_k=k$ et le coefficient dominant de P_k est $\frac{1}{\|R_k\|}>0$ et ainsi, il existe bien une base orthonormée de *E*, échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.

Supposons maintenant que l'on ait deux telles bases : $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ et $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$.

Notons pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k > 0$ et $b_k > 0$ les coefficients dominants respectifs de P_k et Q_k.

Montrons par récurrence forte que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $Q_k = P_k$.

- Pour $k = 0$, P_0 et Q_0 sont tous deux degré 0, donc $Q_0 = \lambda P_0$ avec $b_0 = \lambda a_0$ donc $\lambda > 0$, et :

$$1 = (Q_0 \mid Q_0) = \lambda^2 (P_0 \mid P_0) = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \text{ (car } \lambda > 0\text{)}.$$

  Ainsi, $Q_0 = P_0$ et la propriété est au rang 0.

- Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $k \in [\![0, n-1]\!]$.

  Alors, $R = \dfrac{Q_{k+1}}{b_{k+1}} - \dfrac{P_{k+1}}{a_{k+1}}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à k donc $R = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i$.

  Mais alors, pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, $Q_i = P_i$ et :

$$\lambda_i = (R \mid P_i) = \left(\frac{Q_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{P_{k+1}}{a_{k+1}} \mid P_i\right) = \frac{1}{b_{k+1}}(Q_{k+1} \mid P_i) - \frac{1}{a_{k+1}}(P_{k+1} \mid P_i) = \frac{1}{b_{k+1}}(Q_{k+1} \mid Q_i) - \frac{1}{a_{k+1}}(P_{k+1} \mid P_i) = 0.$$

  Donc $R = 0$, soit $Q_{k+1} = \lambda P_{k+1}$ avec $\lambda = \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}} > 0$. On obtient $\lambda = 1$ comme plus haut.

  Ainsi, $Q_{k+1} = P_{k+1}$ et la propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

Ainsi :

> Il existe une unique base orthonormée de *E*, échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.

3) a. Le terme de plus haut degré de $(X^2-1)^k$ est X^{2k} donc le terme de plus haut degré de Q_k est :

$$(X^{2k})^{(k)} = 2k(2k-1)\dots(k+1)X^k = \frac{(2k)!}{k!}X^k$$

Ainsi :

> Q_k est de degré *k* et de coefficient dominant $\dfrac{(2k)!}{k!}$.

b. La famille $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est donc une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes de $E = \mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$. Ainsi :

> $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de *E*.

c. Posons pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P_k = (X^2-1)^k$. On a alors, $Q_k = P_k^{(k)}$.

Remarquons que comme – 1 et 1 sont racines de multiplicité *k* dans P_k, ces deux réels sont racines de $P_k^{(p)}$ pour tout entier compris entre 0 et $k-1$.

Alors, pour tout $(i,j)\in [\![0,n]\!]^2$, on a, en intégrant deux fois par parties :

$$(Q_i \mid Q_j)=\int_{-1}^{1} P_i^{(i)}(t)P_j^{(j)}(t)dt=\left[P_i^{(i)}(t)P_j^{(j-1)}(t)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} P_i^{(i+1)}(t)P_j^{(j-1)}(t)dt=-\int_{-1}^{1} P_i^{(i+1)}(t)P_j^{(j-1)}(t)dt$$
$$=-\left[P_i^{(i+2)}(t)P_j^{(j-1)}(t)\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1} P_i^{(i+2)}(t)P_j^{(j-2)}(t)dt=\int_{-1}^{1} P_i^{(i+2)}(t)P_j^{(j-2)}(t)dt$$

En continuant ainsi, on obtient pour tout $p\le j$, $(Q_i \mid Q_j)=\int_{-1}^{1} P_i^{(i+p)}(t)P_j^{(j-p)}(t)dt$ et en particulier pour $p=j$:

$$(Q_i \mid Q_j)=\int_{-1}^{1} P_i^{(i+j)}(t)P_j(t)dt\,.$$

Mais, si $i<j$, alors $i+j>2i=\deg P_i$, donc $P_i^{(i+j)}=0$ et ainsi, $(Q_i \mid Q_j)=0$.

Par symétrie du produit scalaire, on a aussi $(Q_i \mid Q_j)=0$ pour $i>j$ et ainsi, $(Q_i \mid Q_j)=0$ pour $i\ne j$ donc :

$$\boxed{\text{La famille } (Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \text{ est une base orthogonale de } E.}$$

Exercice 3

L'identité du parallélogramme est $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$, qui est donc vérifiée ici pour tout $(x,y)\in E^2$. Montrer que la norme est hilbertienne revient à montrer qu'elle dérive d'un produit scalaire et si tel est le cas, alors ce produit scalaire et la norme vérifient les identités de polarisation.

En particulier, pour tout $(x,y)\in E^2$, $\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4(x\mid y)$, soit :

$$(x\mid y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right).$$

Il faut donc montrer que $(x,y)\mapsto (x\mid y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$ est un produit scalaire sur *E*.

Cette application va de E^2 dans $\mathbb{R}$ et est symétrique ($\|x+y\|=\|y+x\|$ et $\|x-y\|=\|y-x\|$).

De plus, pour tout $x\in E$, $(x\mid x)=\frac{1}{4}\left(\|x+x\|^2-\|x-x\|^2\right)=\|x\|^2\ge 0$ et $(x\mid x)=\|x\|^2=0$ équivaut à $x=0$ (séparation de la norme).

Reste à prouver la bilinéarité, donc la linéarité à gauche (la symétrie entrainera alors la linéarité à droite).

Nous allons procéder en deux temps.

Soient $(x,x',y)\in E^3$. On a :

$$4(x+x'\mid y)=\|x+x'+y\|^2-\|x+x'-y\|^2=\left\|x+\frac{1}{2}y+x'+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x-\frac{1}{2}y+x'-\frac{1}{2}y\right\|^2.$$

Et, avec l'identité du parallélogramme :

$$\left\|x+\frac{1}{2}y+x'+\frac{1}{2}y\right\|^2=2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-\left\|x+\frac{1}{2}y-x'-\frac{1}{2}y\right\|^2=2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-\|x-x'\|^2$$

$$\left\|x-\frac{1}{2}y+x'-\frac{1}{2}y\right\|^2=2\left(\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-\left\|x-\frac{1}{2}y-x'+\frac{1}{2}y\right\|^2=2\left(\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-\|x-x'\|^2$$

Donc :

$$\begin{aligned}4(x+x'\mid y) &= 2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-2\left(\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right)\\ &= 2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right)\end{aligned}.$$

Remarquons que l'identité du parallélogramme peut aussi s'écrire pour tout $(X,Y)\in E^2$:

$$\|X\|^2+\|Y\|^2=\frac{1}{2}\left(\|X+Y\|^2+\|X-Y\|^2\right).$$

Donc :

$$\begin{cases}\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2+\|x\|^2\right)\\ \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|x-y\|^2\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2+\|x\|^2\right)-\left\|\frac{1}{2}y\right\|^2\\ \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x-y\|^2+\|x\|^2\right)-\left\|\frac{1}{2}y\right\|^2\end{cases}$$

Ainsi :

$$\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)=2(x\mid y).$$

On a bien sûr de même $\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2=2(x'\mid y)$ et donc :

$$4(x+x'\mid y)=2\left[2(x\mid y)+2(x'\mid y)\right]=4\left[(x\mid y)+(x'\mid y)\right].$$

Ainsi, pour tout $(x,x',y)\in E^3$:

$$(x+x'\mid y)=(x\mid y)+(x'\mid y)\quad\textbf{(1)}.$$

Soit maintenant $(x,y)\in E^2$. Posons pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$f(\lambda)=(\lambda x\mid y)=\frac{1}{4}\left(\|\lambda x+y\|^2-\|\lambda x-y\|^2\right).$$

L'application *f* est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

De plus, comme $X\mapsto\|X\|$ est continue sur *E* (car 1-liptschizienne du fait de l'inégalité triangulaire), *f* est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que différences de telles fonctions.

Enfin, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a d'après le résultat **(1)** :

$$f(\lambda+\mu)=\left((\lambda+\mu)x\mid y\right)=(\lambda x+\mu x\mid y)=(\lambda x\mid y)+(\mu x\mid y)=f(\lambda)+f(\mu).$$

Ainsi, *f* est une application continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(\lambda+\mu)=f(\lambda)+f(\mu)$ pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, donc *f* est linéaire (*exercice classique de première année* : on prouve que pour tout $(\lambda,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}$, $f(n\lambda)=nf(\lambda)$, puis on évalue *f* sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R}$ par continuité, grâce à densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Il existe donc un réel fixé *a* tel que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(\lambda)=a\lambda$ et $a=f(1)=(x\mid y)$, donc pour tout $(x,y)\in E^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$(\lambda x\mid y)=\lambda(x\mid y)\quad\textbf{(2)}.$$

Les résultats **(1)** et **(2)** prouvent que $(x,y)\mapsto(x\,|\,y)$ est linéaire à gauche et ainsi, $(x,y)\mapsto(x\,|\,y)$ est un produit scalaire, donc :

$$\boxed{\text{Toute norme de } E \text{ vérifiant l'identité du parallélogramme est hilbertienne.}}$$

Exercice 4

Si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée, alors on a $\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right| = 0$ et l'inégalité est immédiate.

Supposons que la famille est libre, alors c'est une base de E (qui est de de dimension n) et les x_k sont tous non nuls. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit une nouvelle base orthonormée de E, $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ avec pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - (x_{k+1}\,|\,e_1)e_1 - (x_{k+1}\,|\,e_2)e_2 - \dots - (x_{k+1}\,|\,e_k)e_k \text{ et } e_{k+1} = \frac{1}{\|\varepsilon_{k+1}\|}\varepsilon_{k+1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) &= \det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}\left[x_n - (x_n\,|\,e_1)e_1 - (x_n\,|\,e_2)e_2 - \dots - (x_n\,|\,e_{n-1})e_{n-1}\right]\right) \\
&= \det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}x_n\right) = \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, x_n) \\
&= \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|}\left[x_{n-1} - (x_{n-1}\,|\,e_1)e_1 - (x_{n-1}\,|\,e_2)e_2 - \dots - (x_{n-1}\,|\,e_{n-2})e_{n-2}\right], x_n\right) \\
&= \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|}x_{n-1}, x_n\right) = \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\
&\ \vdots \\
&= \frac{1}{\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}(e_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\
&= \frac{1}{\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(\frac{1}{\|x_1\|}x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\right) \\
&= \frac{1}{\|x_1\|.\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right| = \|x_1\|.\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|.\left|\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n)\right|$$

Or, $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det P$ où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a $P^{-1} = {}^tP$, donc ${}^tPP = I_n$ et :

$$\det({}^tPP) = \left(\det {}^tP\right)\left(\det P\right) = \left(\det P\right)^2 = \det I_n = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n)\right| = \left|\det P\right| = 1.$$

Ainsi :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right| = \|x_1\|.\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|.$$

Enfin, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$:

$$x_k = \|\varepsilon_k\|e_k + (x_k\,|\,e_1)e_1 + (x_k\,|\,e_2)e_2 + \dots + (x_k\,|\,e_{k-1})e_{k-1}.$$

Et comme la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est orthonormée, on a :

$$\|x_k\|^2 = \|\varepsilon_k\|^2 + (x_k \mid e_1)^2 + (x_k \mid e_2)^2 + ... + (x_k \mid e_{k-1})^2 \geq \|\varepsilon_k\|^2 \quad \Rightarrow \quad \|\varepsilon_k\| \leq \|x_k\|.$$

Donc, $\|\varepsilon_2\| ... \|\varepsilon_{n-1}\| . \|\varepsilon_n\| \leq \|x_2\| ... \|x_{n-1}\| . \|x_n\|$ et ainsi :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| \leq \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\|.$$

Finalement, on a bien dans tous les cas :

$$\boxed{\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| \leq \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\|}$$

Il est clair que si l'un des x_k est nul, alors $\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| = \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\| = 0$.

Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \neq 0$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée, alors on a $\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)\right| = 0 < \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\|$.

Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \neq 0$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre, alors d'après ce qui précède, on a :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)\right| = \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\| \quad \Leftrightarrow \quad \|x_2\| ... \|x_n\| = \|\varepsilon_2\| ... \|\varepsilon_{n-1}\| . \|\varepsilon_n\|.$$

Comme pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\|\varepsilon_k\| \leq \|x_k\|$, aucune de ces inégalité ne peut être stricte avec l'égalité ci-dessus. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)\right| = \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\| \quad & \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![2, n]\!],\ \|x_k\| = \|\varepsilon_k\| \\
& \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![2, n]\!],\ (x_k \mid e_1) = (x_k \mid e_2) = (x_k \mid e_{k-1}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![2, n]\!],\ x_k \in \left(\mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_{k-1})\right)^{\perp} \\
& \Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![2, n]\!],\ x_k \in \left(\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_{k-1})\right)^{\perp}
\end{aligned}$$

Et ceci est vrai si et seulement si la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ était initialement orthogonale.

Finalement :

$\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| = \|x_1\| . \|x_2\| ... \|x_n\|$ si et seulement si l'un des x_k est nul ou la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est orthogonale.

Exercice 5

On a $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $(x, y) \in E^2$: $(x \mid y) = 0 \Rightarrow \left(f(x) \mid f(y)\right) = 0$.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $\|x\| = \|y\| = 1$. On a alors :

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + y \mid x - y) = 0.$$

Or :

$$(x + y \mid x - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(f(x + y) \mid f(x - y)\right) = 0.$$

Et :

$$\left(f(x + y) \mid f(x - y)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(f(x) + f(y) \mid f(x) - f(y)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|f(x)\|^2 = \|f(y)\|^2.$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $\|x\| = \|y\| = 1$, on a $\|f(x)\| = \|f(y)\|$, donc $x \mapsto \|f(x)\|$ est constante sur la sphère unité de centre 0_E.

Autrement dit, il existe un réel positif k tel que pour tout $x\in E$ tel que $\|x\|=1$, on a, $\|f(x)\|=k$.

Mais alors, pour tout $x\in E\setminus\{0_E\}$, on a :

$$\|f(x)\|=\left\|f\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|=\left\|\|x\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|=\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\|x\|=k\|x\|.$$

Et bien sûr, $\|f(0_E)\|=\|0_E\|=0=k\|0_E\|$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien un réel positif } k \text{ tel que pour tout } x\in E,\ \|f(x)\|=k\|x\|.}$$

Exercice 6

1) L'application $(A,B)\mapsto\langle A,B\rangle$ définit un produit scalaire sur E : c'est du cours, c'est même le produit scalaire canonique sur $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Appelons S l'ensemble des solutions du problème, soit :

$$S=\left\{P\in GL_n(\mathbb{R})\setminus\forall A\in E, \|A\|=\left\|P^{-1}AP\right\|\right\}.$$

Remarquons déjà que S est non vide car contient au moins I_n.

Soit $P\in S$. On a $\|A\|=\left\|P^{-1}AP\right\|$ pour toute A de E. Si on pose $B=P^{-1}A$ (donc $A=PB$), on a $\|PB\|=\|BP\|$ et comme B décrit E quand A décrit E, on peut écrire :

$$S=\left\{P\in GL_n(\mathbb{R})\setminus\forall B\in E, \|PB\|=\|BP\|\right\}.$$

Alors, si $P\in S$, on a pour tout $(B_1,B_2)\in E^2$, $\|PB_1\|=\|B_1P\|$, $\|PB_2\|=\|B_2P\|$ et :

$$\begin{aligned}\|P(B_1+B_2)\|=\|(B_1+B_2)P\| &\iff \|PB_1+PB_2\|^2=\|B_1P+B_2P\|^2\\ &\iff \|PB_1\|^2+2\langle PB_1,PB_2\rangle+\|PB_2\|^2=\|B_1P\|^2+2\langle B_1P,B_2P\rangle+\|B_2P\|^2\\ &\iff \langle PB_1,PB_2\rangle=\langle B_1P,B_2P\rangle \quad (\text{avec } \|PB_1\|^2=\|B_1P\|^2 \text{ et } \|PB_2\|^2=\|B_2P\|^2)\end{aligned}$$

Réciproquement, si pour tout $(B_1,B_2)\in E^2$, $\langle PB_1,PB_2\rangle=\langle B_1P,B_2P\rangle$, alors pour toute matrice $B\in E$, on a $\|PB\|^2=\|BP\|^2$ (avec $B=B_1=B_2$). Ainsi :

$$S=\left\{P\in GL_n(\mathbb{R})\setminus\forall (B_1,B_2)\in E^2, \langle PB_1,PB_2\rangle=\langle B_1P,B_2P\rangle\right\}.$$

Notons $(E_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, la base canonique de E. Si $P\in S$, on a alors $\langle PE_{i,j},PE_{i',j'}\rangle=\langle E_{i,j}P,E_{i',j'}P\rangle$ pour tous i,j,i',j' de $[\![1,n]\!]$.

Réciproquement, supposons qu'une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ vérifie $\langle PE_{i,j},PE_{i',j'}\rangle=\langle E_{i,j}P,E_{i',j'}P\rangle$ pour tous i,j,i',j' de $[\![1,n]\!]$. Alors, pour tout $(B_1,B_2)\in E^2$ telles que $B_1=\sum_{1\le i,j\le n}\alpha_{i,j}E_{i,j}$ et $B_2=\sum_{1\le i',j'\le n}\beta_{i',j'}E_{i',j'}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle PB_1,PB_2\rangle&=\left\langle\sum_{1\le i,j\le n}\alpha_{i,j}PE_{i,j},\sum_{1\le i',j'\le n}\beta_{i',j'}PE_{i',j'}\right\rangle=\sum_{1\le i,j,i',j'\le n}\alpha_{i,j}\beta_{i',j'}\langle PE_{i,j},PE_{i',j'}\rangle\\ &=\sum_{1\le i,j,i',j'\le n}\alpha_{i,j}\beta_{i',j'}\langle E_{i,j}P,E_{i',j'}P\rangle=\left\langle\sum_{1\le i,j\le n}\alpha_{i,j}E_{i,j}P,\sum_{1\le i',j'\le n}\beta_{i',j'}E_{i',j'}P\right\rangle=\langle B_1P,B_2P\rangle\end{aligned}$$

Donc, $P \in S$. Ainsi :

$$S = \left\{ P \in GL_n(\mathbb{R}) \setminus \forall\, (i,j,i',j') \in [\![1,n]\!]^4, \left\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \right\rangle = \left\langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \right\rangle \right\}.$$

Soit maintenant une matrice *P* quelconque de *E*. Notons $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.

Pour tout $(i,j,i',j') \in [\![1,n]\!]^4$, $PE_{i,j}$ (*resp.* $PE_{i',j'}$) est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la $j^{\text{ième}}$ (*resp.* la $j'^{\text{ième}}$) qui est C_i (*resp.* $C_{i'}$), donc :

$$\left\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \right\rangle = \delta_{j,j'} \left(C_i \mid C_{i'} \right)$$

où $\left(\cdot \mid \cdot \right)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

De la même façon, pour tout $(i,j,i',j') \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{i,j}P$ (*resp.* $E_{i',j'}P$) est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la $i^{\text{ième}}$ (*resp.* la $i'^{\text{ième}}$) qui est L_j (*resp.* $L_{j'}$), donc :

$$\left\langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \right\rangle = \delta_{i,i'} \left(L_j \mid L_{j'} \right).$$

Alors :

$$\begin{aligned} P \in S \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, (i,j,i',j') \in [\![1,n]\!]^4, \left\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \right\rangle = \left\langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \right\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, (i,j,i',j') \in [\![1,n]\!]^4, \delta_{j,j'} \left(C_i \mid C_{i'} \right) = \delta_{i,i'} \left(L_j \mid L_{j'} \right) \end{aligned}$$

Or, si $i \neq i'$ et $j \neq j'$, $\delta_{j,j'} = \delta_{i,i'} = 0$, donc $\delta_{j,j'} \left(C_i \mid C_{i'} \right) = \delta_{i,i'} \left(L_j \mid L_{j'} \right)$. D'où :

$$P \in S \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall\, (i,i') \in [\![1,n]\!]^2, \ i \neq i', \ \left(C_i \mid C_{i'} \right) = 0 \\ \forall\, (j,j') \in [\![1,n]\!]^2, \ j \neq j', \ \left(L_j \mid L_{j'} \right) = 0 \\ \forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ \left(C_i \mid C_i \right) = \left(L_j \mid L_j \right) \end{cases}$$

Soit :

$$P \in S \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \ \begin{cases} \forall\, (i,i') \in [\![1,n]\!]^2, \ i \neq i', \ \left(C_i \mid C_{i'} \right) = \delta_{i,i'} \lambda^2 \\ \forall\, (j,j') \in [\![1,n]\!]^2, \ j \neq j', \ \left(L_j \mid L_{j'} \right) = \delta_{j,j'} \lambda^2 \end{cases}$$

Remarquons que :

$$\forall\, (i,i') \in [\![1,n]\!]^2, \ i \neq i', \ \left(C_i \mid C_{i'} \right) = \delta_{i,i'} \lambda^2 \quad \Leftrightarrow \quad {}^tPP = \lambda^2 I_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, (j,j') \in [\![1,n]\!]^2, \ j \neq j', \ \left(L_j \mid L_{j'} \right) = \delta_{j,j'} \lambda^2$$

Finalement,

$$P \in S \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \ {}^tPP = \lambda^2 I_n.$$

Enfin, si ${}^tPP = \lambda^2 I_n$ avec $\lambda \neq 0$ alors *P* est inversible et donc :

Les solutions du problème sont les matrices $P \in E$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que ${}^tPP = \lambda^2 I_n$.

Remarquons que ${}^tPP = \lambda^2 I_n$ *revient à* $\dfrac{1}{\lambda} P \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7

On a d'une part $x^2 f(x) = x^{3/2}\left(x^{1/2} f(x)\right)$, donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^3 dx\right)\left(\int_0^1 x f(x)^2 dx\right) = \frac{1}{4}\int_0^1 x f(x)^2 dx.$$

Et, comme *f* est positive sur $[0;1]$, on peut écrire $x f(x)^2 = x f(x)^{1/2} f(x)^{3/2}$, d'où, toujours d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 x f(x)^2 dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)^3 dx\right).$$

Alors, comme *f* est positive sur $[0;1]$, on a $\int_0^1 x f(x)^2 dx \geq 0$ et :

$$4\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)^2 \left(\int_0^1 x f(x)^2 dx\right) \leq \left(\int_0^1 x f(x)^2 dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)^3 dx\right) \quad \textbf{(*)}.$$

Enfin, comme f est positive et continue sur $[0;1]$, $x \mapsto x^2 f(x)$ est positive et continue sur $[0;1]$, donc $\int_0^1 x^2 f(x)dx \geq 0$ et si $\int_0^1 x^2 f(x)dx = 0$, alors $x \mapsto x^2 f(x)$ est nulle sur $[0;1]$, donc *f* l'est aussi et dans ce cas, l'inégalité recherchée est vérifiée (c'est même une égalité, les deux membres étant nuls).

Si *f* n'est pas nulle sur $[0;1]$, alors $\int_0^1 x^2 f(x)dx > 0$ et on peut simplifier **(*)**, ce qui donne :

$$\boxed{4\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 x f(x)^2 dx\right) \leq \int_0^1 f(x)^3 dx}$$

Exercice 8

1) Quels que soient P,Q de $\mathbb{R}[X]$, l'application $t \mapsto \sqrt{1-t}P(t)Q(t)$ est continue sur $[-1,1]$ et l'application $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ est continue sur $]-1,1]$ et intégrable sur $[-1,1]$, donc $t \mapsto \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P(t)Q(t)$ est continue sur $]-1,1]$ et intégrable sur $[-1,1]$, et ainsi :

$$\boxed{\text{L'application } (P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P(t)Q(t)\,dt \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}[X]^2.}$$

L'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P(t)Q(t)\,dt$ est symétrique (par commutativité du produit) et bilinéaire (par linéarité de l'intégrale). De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $t \in]-1,1]$, $\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P(t)^2 \geq 0$, donc :

$$\langle P,P\rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P(t)^2\,dt \geq 0.$$

Enfin, si $\langle P,P\rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P(t)^2\,dt = 0$, alors comme l'application $t \mapsto \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P(t)^2$ est continue et positive sur $]-1,1]$, elle est nulle sur cet intervalle. Comme $\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ ne s'annule qu'en 1, P s'annule en tout point de $]-1,1[$, donc admet une infinité de racines, donc le polynôme *P* est nul.

Finalement, $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur $\mathbb{R}[X]$, donc :

$$\boxed{(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

2) Remarquons que pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$:

$$\phi(P)=(X^2-1)P''+(2X+1)P'=(X^2-1)P''+2XP'+P'=[(X^2-1)P']'+P'.$$

Donc, pour tous $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, en posant $R=(X^2-1)P'$, on a :

$$\langle\phi(P),Q\rangle=\langle R'+P',Q\rangle=\langle R',Q\rangle+\langle P',Q\rangle.$$

Et, pour tout $[a,b]\subset]-1,1[$, $t\mapsto R(t)$ et $t\mapsto\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}Q(t)$ sont C^1 sur $[a,b]$, et par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_a^b R'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}Q(t)\,dt&=\left[R(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}Q(t)\right]_a^b-\int_a^b R(t)\left[\frac{-\dfrac{2}{(1+t)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}}Q(t)+\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}Q'(t)\right]dt\\
&=\left[(t^2-1)P'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}Q(t)\right]_a^b-\int_a^b(t^2-1)\left[-\frac{1}{(1+t)^{3/2}\sqrt{1-t}}Q(t)+\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}Q'(t)\right]dt\\
&=\left[(t-1)\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q(t)\right]_a^b-\int_a^b\frac{(1-t^2)}{(1+t)^{3/2}\sqrt{1-t}}P'(t)Q(t)\,dt+\int_a^b(1-t)\sqrt{1-t^2}P'(t)Q'(t)\,dt\\
&=\left[(t-1)\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q(t)\right]_a^b-\int_a^b\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P'(t)Q(t)\,dt+\int_a^b(1-t)\sqrt{1-t^2}P'(t)Q'(t)\,dt
\end{aligned}$$

Et, en faisant tendre a vers – 1 et b vers 1, on obtient :

$$\int_{-1}^1 R'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}Q(t)\,dt=\left[(t-1)\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q(t)\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P'(t)Q(t)\,dt+\int_{-1}^1(1-t)\sqrt{1-t^2}P'(t)Q'(t)\,dt.$$

Soit :

$$\langle R',Q\rangle=-\langle P',Q\rangle+\int_{-1}^1(1-t)\sqrt{1-t^2}P'(t)Q'(t)\,dt.$$

Et encore :

$$\langle\phi(P),Q\rangle=\langle R',Q\rangle+\langle P',Q\rangle=\int_{-1}^1(1-t)\sqrt{1-t^2}P'(t)Q'(t)\,dt.$$

On a alors :

$$\langle P,\phi(Q)\rangle=\langle\phi(Q),P\rangle=\int_{-1}^1(1-t)\sqrt{1-t^2}Q'(t)P'(t)\,dt=\int_{-1}^1(1-t)\sqrt{1-t^2}P'(t)Q'(t)\,dt=\langle\phi(P),Q\rangle.$$

Ainsi, pour tous $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, $\langle P,\phi(Q)\rangle=\langle\phi(P),Q\rangle$, donc :

$$\boxed{\text{L'application } \phi \text{ est symétrique pour le produit scalaire considéré.}}$$

3) On a $\phi(1)=0$, $\phi(X)=2X+1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$:

$$\phi(X^n)=(X^2-1)n(n-1)X^{n-2}+(2X+1)nX^{n-1}=n(n+1)X^n+nX^{n-1}-n(n-1)X^{n-2}.$$

Ainsi, $\phi(1)=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\deg\big(\phi(X^n)\big)=n$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ, d'où :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ \phi \text{ induit un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Notons ϕ_n cet endomorphisme induit. Comme ϕ est symétrique (pour le produit scalaire considéré), ϕ_n l'est aussi et donc, d'après le théorème spectral (on est dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme induit } \phi_n \text{ est diagonalisable.}}$$

Soit $k\in[\![0,n]\!]$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $P_k\in\mathbb{R}[X]$ un éventuel polynôme unitaire (non nul) de degré *k* tel que $\phi(P_k)=\lambda P_k$.

- Si $k=0$, alors $P_0=1$ et on a $\phi(P_0)=0=0P_0$, donc 0 est valeur propre et 1 est un vecteur propre associé.
- Si $k=1$, alors $P_1=X+\alpha$ et on a $\phi(P_1)=\phi(X)=2X+1=2\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$, donc 2 est valeur propre et $P_1=X+\dfrac{1}{2}$ est un vecteur propre associé.
- Si $k\geq 2$, on peut poser $P_k=X^k+Q_k$ avec $\deg Q_k\leq k-1$ et :

$$\phi(P_k)=\phi(X^k)+\phi(Q_k)=k(k+1)X^k+kX^{k-1}-k(k-1)X^{k-2}+\phi(Q_k).$$

Comme $Q_k\in\mathbb{R}_{k-1}[X]$, $\phi(Q_k)\in\mathbb{R}_{k-1}[X]$, donc $\deg\left[kX^{k-1}-k(k-1)X^{k-2}+\phi(Q_k)\right]\leq k-1$. Alors :

$$\phi(P_k)=\lambda P_k \quad\Leftrightarrow\quad k(k+1)X^k+kX^{k-1}-k(k-1)X^{k-2}+\phi(Q_k)=\lambda X^k+\lambda Q_k \quad\Rightarrow\quad \lambda=k(k+1).$$

Remarquons que dans tous les cas, si un polynôme P_k de degré k est un vecteur propre de ϕ, alors la valeur propre associée est $k(k+1)$.

Réciproquement, soit $k\in[\![0,n]\!]$.

On a vu plus haut que $\phi(1)=0$ et pour tout $d\in\mathbb{N}^*$, $\deg\big(\phi(X^d)\big)=d$, donc pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré $d\in\mathbb{N}$, on a :

- $\phi(P)=0$ si $d=0$;
- $\deg\big(\phi(P)\big)=d$ si $d>0$.

Ceci prouve déjà que $\phi(P)=0$ si et seulement si *P* est constant. Donc :

0 est valeur propre de ϕ_n, de sous-espace propre associé la droite $\operatorname{Vect}(1)\ \big(=\ker\phi\big)$.

De plus, $k(k+1)=0$ si et seulement si $k=0$.

On suppose maintenant que $k\in[\![1,n]\!]$ (donc $k(k+1)\neq 0$).

Cherchons alors un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ unitaire, de degré $d\in\mathbb{N}^*$ et tel que $\phi(P)=k(k+1)P$.

On a vu plus haut que le terme de plus haut degré de $\phi(P)$ et $d(d+1)X^d$, et celui de $k(k+1)P$ est $k(k+1)X^d$, donc $d(d+1)=k(k+1)$, qui implique immédiatement que $d=k$ (car $x\mapsto x(x+1)$ est strictement croissante donc injective sur $\mathbb{R}_+$). Ainsi, *P* est de degré *k*.

Si $k=1$, alors, comme plus haut, $\phi(P)=2P$ donne $P=X+\dfrac{1}{2}$. Donc :

$1\times(1+1)=2$ est valeur propre de ϕ_n, de sous-espace propre associé la droite $\mathrm{Vect}\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$.

Si $k=2$, $P=X^2+aX+b$ et :

$$\phi(P)=k(k+1)P \iff 6X^2+2X-2+a(2X+1)=6X^2+6aX+6b \iff \begin{cases}2(a+1)=6a\\ a-2=6b\end{cases} \iff \begin{cases}a=1/2\\ b=-1/4\end{cases}$$

Donc :

$2\times(2+1)=6$ est valeur propre de ϕ_n, de sous-espace propre associé la droite $\mathrm{Vect}\left(X^2+\dfrac{1}{2}X-\dfrac{1}{4}\right)$.

Si $k\geq 3$, $P=X^k+\sum_{i=0}^{k-1}a_iX^i$ et :

$$\begin{aligned}
\phi(P)=k(k+1)P &\iff \phi\left(X^k+\sum_{i=0}^{k-1}a_iX^i\right)=k(k+1)\left(X^k+\sum_{i=0}^{k-1}a_iX^i\right)\\
&\iff \phi(X^k)+\sum_{i=0}^{k-1}a_i\phi(X^i)=k(k+1)X^k+k(k+1)\sum_{i=0}^{k-1}a_iX^i\\
&\iff k(k+1)X^k+kX^{k-1}-k(k-1)X^{k-2}+\sum_{i=2}^{k-1}a_i\left[i(i+1)X^i+iX^{i-1}-i(i-1)X^{i-2}\right]\\
&\qquad\qquad +a_1(2X+1)=k(k+1)X^k+k(k+1)\sum_{i=0}^{k-1}a_iX^i\\
&\iff kX^{k-1}-k(k-1)X^{k-2}+\sum_{i=0}^{k-1}a_i\left[i(i+1)X^i+iX^{i-1}-i(i-1)X^{i-2}\right]=k(k+1)\sum_{i=0}^{k-1}a_iX^i
\end{aligned}$$

Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases}
a_{k-1}=\dfrac{1}{2}\\
a_{k-2}=\dfrac{(k-1)\left[a_{k-1}-k\right]}{2(2k-1)}\\
a_i=\dfrac{(i+1)\left[a_{i+1}-(i+2)a_{i+2}\right]}{k(k+1)-i(i+1)} & \forall\, i\in[\![2,k-3]\!]\\
a_1=\dfrac{2a_2-6a_3}{k(k+1)}\\
a_0=-\dfrac{2a_2}{k(k+1)}
\end{cases}$$

Ce système admet une et une seule solution et ainsi, il existe un unique polynôme unitaire P_k tel que $\phi(P_k)=k(k+1)P_k$, donc :

$k(k+1)$ est valeur propre de ϕ_n, de sous-espace propre associé la droite $\mathrm{Vect}(P_k)$.

Finalement, les valeurs propres de ϕ_n sont les $k(k+1)$ avec $k\in[\![0,n]\!]$ et les sous-espaces propre associé sont droites $\mathrm{Vect}(P_k)$ avec $\deg(P_k)=k$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.

Comme $\mathbb{R}_n[X]=\overset{n}{\underset{k=0}{\oplus}}\operatorname{Vect}(P_k)$, la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ de vecteurs propres de ϕ, telle que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$.

Enfin, soient $i, j\in[\![0,n]\!]$ tels que $i\neq j$. D'après ce que l'on a vu plus haut $i(i+1)\neq j(j+1)$ et :

$$\left\langle P_i,\phi(P_j)\right\rangle=\left\langle\phi(P_i),P_j\right\rangle \iff \left\langle P_i, j(j+1)P_j\right\rangle=\left\langle i(i+1)P_i,P_j\right\rangle \iff [j(j+1)-i(i+1)]\left\langle P_i,P_j\right\rangle=0.$$

Et comme $j(j+1)-i(i+1)\neq 0$, on obtient $\left\langle P_i,P_j\right\rangle=0$, donc les P_k sont orthogonaux deux à deux.

En définitive :

$$\boxed{\text{Il existe une base orthogonale de vecteurs propres } (P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ telle que pour tout } k\in[\![0,n]\!],\ \deg P_k = k.}$$

Exercice 9

1) Soient $f, g\in E$. On a :

$$\left(|f|-|g|\right)^2\geq 0 \Rightarrow |fg|\leq\frac{1}{2}(f^2+g^2).$$

Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$, fg l'est aussi par comparaison, donc $\left\langle f,g\right\rangle$ est défini :

$$\boxed{\text{L'application } (f,g)\mapsto\left\langle f,g\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t)\,dt \text{ est bien définie sur } E^2.}$$

L'application $(f,g)\mapsto\left\langle f,g\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t)\,dt$ est symétrique (par commutativité du produit) et bilinéaire (par linéarité de l'intégrale). De plus, pour tout $f\in E$, $f^2\geq 0$, donc $\left\langle f,f\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)^2\,dt\geq 0$.

Enfin, si $\left\langle f,f\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)^2\,dt=0$, alors comme f est continue sur $\mathbb{R}$, f^2 est continue et positive sur $\mathbb{R}$, elle est donc nulle. Ainsi, $\left\langle f,f\right\rangle=0$ implique $f=0$.

Finalement, $(f,g)\mapsto\left\langle f,g\right\rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur *E*, donc :

$$\boxed{(f,g)\mapsto\left\langle f,g\right\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2) Remarquons déjà que comme Q_r est inversible, 0 n'est pas valeur propre. De plus, par symétrie du produit scalaire, Q_r est symétrique (réelle), donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles. Ainsi, prouver que la plus petite valeur propre de Q_r est strictement positive revient à prouver que toutes les valeurs propres de Q_r sont positives (forcément strictement d'après ce qui précède). Soit donc $\lambda\in\mathbb{R}$ une valeur propre de Q_r et $X=(x_1,\dots,x_r)\in\mathbb{R}^r$ un vecteur propre associé (non nul).

On a alors, avec la linéarité à droite du produit scalaire et en posant $\varphi=\sum_{j=1}^{r}x_j\varphi_j$:

$$Q_rX=\lambda X \iff \forall\, i\in[\![1,r]\!],\ \sum_{j=1}^{r}\left\langle\varphi_i,\varphi_j\right\rangle x_j=\left\langle\varphi_i,\sum_{j=1}^{r}x_j\varphi_j\right\rangle=\left\langle\varphi_i,\varphi\right\rangle=\lambda x_i.$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \left\langle \varphi_i, \varphi \right\rangle = \lambda \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \sum_{i=1}^{r} x_i \varphi_i, \varphi \right\rangle = \lambda \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \varphi, \varphi \right\rangle = \lambda \sum_{i=1}^{r} x_i^2 .$$

Comme $X \neq 0$, on a $\sum_{i=1}^{r} x_i^2 > 0$ et, avec $\left\langle \varphi, \varphi \right\rangle \geq 0$, on obtient :

$$\lambda = \frac{\left\langle \varphi, \varphi \right\rangle}{\sum_{i=1}^{r} x_i^2} \geq 0 .$$

Ainsi, toutes les valeurs propres de Q_r sont positives, donc strictement positives et :

$$\boxed{\text{La plus petite valeur propre de } Q_r \text{ est strictement positive.}}$$

3) On suppose toujours Q_r inversible et on veut :

$$\varphi_{r+1} \in \operatorname{Vect}\left(\varphi_1, \dots, \varphi_r\right) \iff Q_{r+1} \text{ est non inversible.}$$

Dans ce qui suit, notons $C_1, \dots, C_r, C_{r+1}$ les colonnes Q_{r+1} et $C_1', \dots, C_r'$ celles de Q_r.

($\Rightarrow$) On suppose que $\varphi_{r+1} \in \operatorname{Vect}\left(\varphi_1, \dots, \varphi_r\right)$.

Il existe donc $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $\varphi_{r+1} = a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r$, et :

$$C_{r+1} = \begin{pmatrix} \left\langle \varphi_1, \varphi_{r+1} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \varphi_r, \varphi_{r+1} \right\rangle \\ \left\langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle \varphi_1, a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \varphi_r, a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r \right\rangle \\ \left\langle \varphi_{r+1}, a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r \right\rangle \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} \left\langle \varphi_1, \varphi_1 \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \varphi_r, \varphi_1 \right\rangle \\ \left\langle \varphi_{r+1}, \varphi_1 \right\rangle \end{pmatrix} + \dots + a_r \begin{pmatrix} \left\langle \varphi_1, \varphi_r \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \varphi_r, \varphi_r \right\rangle \\ \left\langle \varphi_{r+1}, \varphi_r \right\rangle \end{pmatrix} = a_1 C_1 + \dots + a_r C_r .$$

Donc, une colonne de Q_{r+1} est combinaison linéaire des autres, ce qui prouve que :

$$Q_{r+1} \text{ n'est pas inversible.}$$

($\Leftarrow$) On suppose que Q_{r+1} n'est pas inversible.

Alors, les colonnes de Q_{r+1} sont liées, autrement dit, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}) \in \mathbb{R}^{r+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que :

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_r C_r + \lambda_{r+1} C_{r+1} = 0 .$$

Si $\lambda_{r+1} = 0$, alors $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_r C_r = 0$ et en supprimant la dernière coordonnée de chaque colonne, on obtient $\lambda_1 C_1' + \dots + \lambda_r C_r' = 0$. Or, Q_r est inversible, donc ses colonnes forment une famille libre et ainsi, on a $\lambda = \dots = \lambda_r = 0 = \lambda_{r+1}$, ce qui est absurde car les λ_k ne sont pas tous nuls.

Ainsi, $\lambda_{r+1} \neq 0$ et on peut écrire :

$$C_{r+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}} C_1 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}} C_r = a_1 C_1 + \dots + a_r C_r .$$

En posant $\varphi = a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r$, ceci implique que pour tout $i \in [\![1, r+1]\!]$:

$$\left\langle \varphi_i, \varphi_{r+1} \right\rangle = a_1 \left\langle \varphi_i, \varphi_1 \right\rangle + \dots + a_r \left\langle \varphi_i, \varphi_r \right\rangle = \left\langle \varphi_i, a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r \right\rangle = \left\langle \varphi_i, \varphi \right\rangle .$$

En particulier $\langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi \rangle$ et :

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \langle \varphi_i, \varphi_{r+1} \rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i \langle \varphi_i, \varphi \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i, \varphi_{r+1} \right\rangle = \langle \varphi, \varphi_{r+1} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i, \varphi \right\rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle .$$

Alors :

$$\langle \varphi_{r+1} - \varphi, \varphi_{r+1} - \varphi \rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle - 2 \langle \varphi_{r+1}, \varphi \rangle + \langle \varphi, \varphi \rangle = 0 .$$

Et donc $\varphi_{r+1} = \varphi = a_1 \varphi_1 + \ldots + a_r \varphi_r$, d'où :

$$\varphi_{r+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) .$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\varphi_{r+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \text{ si et seulement si } Q_{r+1} \text{ est non inversible.}}$$

4) Pour tout $n \in [\![1, r]\!]$, $\varphi_n \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$.

Prouvons par récurrence forte sur *k* que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, .

- Pour $k = 1$, comme Q_r est inversible et Q_{r+1} ne l'est pas, on a $\varphi_{r+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ d'après la question précédente, donc il existe $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $\varphi_{r+1} = a_1 \varphi_1 + \ldots + a_r \varphi_r$.

  Ainsi, la propriété est vraie au rang 1.

- Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $k \in \mathbb{N}^*$.

  Posons $\psi = a_1 \varphi_{1+k} + \ldots + a_r \varphi_{r+k} = \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_{i+k}$. On a :

  $$\langle \psi, \varphi_{r+k+1} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_{i+k}, \varphi_{r+k+1} \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i \langle \varphi_{i+k}, \varphi_{r+k+1} \rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i \langle \varphi_i, \varphi_{r+1} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i, \varphi_{r+1} \right\rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle$$

  $$\langle \psi, \psi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_{i+k}, \sum_{j=1}^{r} a_j \varphi_{j+k} \right\rangle = \sum_{1 \le i, j \le r} a_i a_j \langle \varphi_{i+k}, \varphi_{j+k} \rangle = \sum_{1 \le i, j \le r} a_i a_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i, \sum_{j=1}^{r} a_j \varphi_j \right\rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle$$

  $$\langle \varphi_{r+k+1}, \varphi_{r+k+1} \rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle$$

  Ainsi, $\langle \psi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi_{r+k+1} \rangle = \langle \varphi_{r+k+1}, \varphi_{r+k+1} \rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle$ et :

  $$\langle \psi - \varphi_{r+k+1}, \psi - \varphi_{r+k+1} \rangle = \langle \psi, \psi \rangle - 2 \langle \psi, \varphi_{r+k+1} \rangle + \langle \varphi_{r+k+1}, \varphi_{r+k+1} \rangle = 0 .$$

  Ceci prouve que $\psi - \varphi_{r+k+1} = 0$, donc que :

  $$\varphi_{r+k+1} = \psi = a_1 \varphi_{1+k} + \ldots + a_r \varphi_{r+k} .$$

  Or, par hypothèse de récurrence, $\varphi_{i+k} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, donc :

  $$\varphi_{r+k+1} = \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_{i+k} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) .$$

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_n \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) .}$$