Corrigés des TD du chapitre 18

Exercice 1

1) Le système se récrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{S}).$$

avec $A(t) = \begin{pmatrix} 2\operatorname{sh} t - 1 & 2(\operatorname{sh} t - 1) \\ 1 - \operatorname{sh} t & 2 - \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$.

On a $\chi_{A(t)} = X^2 - (1+\operatorname{sh} t)X + \operatorname{sh} t = (X - \operatorname{sh} t)(X-1)$, donc les valeurs propres de $A(t)$ sont 1 et $\operatorname{sh} t$.

En résolvant $A(t)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $A(t)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \operatorname{sh} t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on trouve $E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{\operatorname{sh} t} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A(t) = P^{-1}D(t)P$ avec $D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$.

En posant $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (donc $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ car P est constante), le système **(*S*)** se récrie alors :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh} t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - \operatorname{ch} t \\ \operatorname{ch} t - 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X' = X + 2 - \operatorname{ch} t \\ Y' = (\operatorname{sh} t)Y + \operatorname{ch} t - 1 \end{cases}$$

On résout les deux équations linéaires d'ordre 1 en X et Y, ce qui donne :

$$\begin{cases} X(t) = \lambda e^t + \dfrac{1}{4}e^{-t} - 2 - \dfrac{1}{2}te^t \\ Y(t) = \left[\mu + \displaystyle\int_0^t (\operatorname{ch} u - 1)e^{\operatorname{ch} u}\,du\right]e^{\operatorname{ch} t} \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On a alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X - 2Y \\ X + Y \end{pmatrix}$, donc :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = -\lambda e^t - \dfrac{1}{4}e^{-t} + 2 + \dfrac{1}{2}te^t - 2\left[\mu + \displaystyle\int_0^t (\operatorname{ch} u - 1)e^{\operatorname{ch} u}\,du\right]e^{\operatorname{ch} t} \\ y(t) = \lambda e^t + \dfrac{1}{4}e^{-t} - 2 - \dfrac{1}{2}te^t + \left[\mu + \displaystyle\int_0^t (\operatorname{ch} u - 1)e^{\operatorname{ch} u}\,du\right]e^{\operatorname{ch} t} \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

2) Dans toute cette question, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, et orienté par sa base canonique, notée $\mathcal{B}_c = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$.

On appelle u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

On note $X = (x_i)_{1\le i\le n}$ où les x_i sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On notera (H) l'équation $X' = AX$ et $S_{(H)}$ l'espace vectoriel de ses solutions.

Pour une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$, et on pose $Y = P^{-1}X$ avec $Y = (y_i)_{1\le i\le n}$.

Notons que si $\mathcal{B}$ est orthonormée, $P \in O_n(\mathbb{R})$ donc $Y = {}^tPX$.

a. A est une matrice de réflexion par rapport à l'hyperplan H.

Soit $\mathcal{B} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que $H = \text{Vect}(V_2, \dots, V_n)$.

On a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = D = diag\left(-1, 1, \dots, 1\right) = {}^tPAP \quad \Leftrightarrow \quad A = PD\,{}^tP.$$

Et :

$$X' = AX \quad \Leftrightarrow \quad X' = PD\,{}^tPX \quad \Leftrightarrow \quad Y' = DY \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y'_1 = -y_1 \\ y'_k = y_k, \forall\, k \in [\![2, n]\!] \end{cases}$$

Alors, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_1(t) = c_1 e^{-t}$ et $y_k(t) = c_k e^t$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, avec $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Enfin, comme $Y = {}^tPX$, on a $X = PY$, d'où pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X(t) = c_1 e^{-t} V_1 + c_2 e^t V_2 + \dots + c_n e^t V_n.$$

Ainsi :

$$\boxed{S_{(H)} = \text{Vect}\left(t \mapsto e^{-t} V_1, t \mapsto e^t V_2, \dots, t \mapsto e^t V_n\right)}$$

b. A est une matrice de projection orthogonale sur un plan F (avec $n \geq 3$).

Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$.

On obtient alors de la même manière que dans la question a :

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 \\ y'_2 = y_2 \\ y'_k = 0, \forall\, k \in [\![3, n]\!] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^t \\ y_2(t) = c_2 e^t \\ y_k = c_k, \forall\, k \in [\![3, n]\!] \end{cases} \quad \text{avec } (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Toujours avec $X = PY$, on aboutit à :

$$\boxed{S_{(H)} = \text{Vect}\left(t \mapsto e^t V_1, t \mapsto e^t V_2, t \mapsto V_3, \dots, t \mapsto V_n\right)}$$

c. Ici $n = 3$ et $A \in O^+(3)$ (A est une matrice de rotation).

Si u est une rotation d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ et d'axe $D = \text{Vect}\left(V_1\right)$ et si $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = {}^tPAP \quad \Leftrightarrow \quad A = PB\,{}^tP.$$

On obtient alors de la même manière que dans la question a :

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 \\ y'_2 = (\cos\alpha) y_2 - (\sin\alpha) y_3 \\ y'_3 = (\sin\alpha) y_2 + (\cos\alpha) y_3 \end{cases}$$

Alors, $y_1 : t \mapsto k e^t$ avec $k \in \mathbb{R}$ et, $z = y_2 + i y_3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $z' = y'_2 + i y'_3 = e^{i\alpha} z$, donc :

$$z : t \mapsto K e^{e^{i\alpha} t} = K e^{(\cos\alpha)t}\left[\cos\left((\sin\alpha)t\right) + i\left((\sin\alpha)t\right)\right] \quad \text{avec } K \in \mathbb{C}.$$

Alors, pour i valant 2 ou 3, on a $y_i : t \mapsto e^{(\cos\alpha)t}\left[\lambda_i \cos\left((\sin\alpha)t\right)+\mu_i \sin\left((\sin\alpha)t\right)\right]$ avec $(\lambda_i,\mu_i)\in\mathbb{R}^2$ et $X = PY$ donne pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X(t) &= y_1(t)V_1 + y_2(t)V_2 + y_3(t)V_3 \\ &= ke^t V_1 + e^{(\cos\alpha)t}\cos\left((\sin\alpha)t\right)\left[\lambda_2 V_2+\lambda_3 V_3\right]+e^{(\cos\alpha)t}\sin\left((\sin\alpha)t\right)\left[\mu_2 V_2+\mu_3 V_3\right] \end{aligned}$$

Donc, avec $W_1\in D\setminus\{0\}$ et $W_2,W_3\in D^{\perp}\setminus\{0\}$:

$$\boxed{S_{(H)} = \mathrm{Vect}\left(t\mapsto e^t W_1, t\mapsto e^{(\cos\alpha)t}\cos\left((\sin\alpha)t\right)W_2, t\mapsto e^{(\cos\alpha)t}\sin\left((\sin\alpha)t\right)W_3\right)}$$

d. Si A est une nilpotente d'indice n, alors $A^{n-1}\neq 0_n$ (et $A^n = 0_n$), donc il existe $X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X_0\neq 0$ (et $A^nX_0 = 0$). La famille $\left(X_0, AX_0, A^2X_0, \dots, A^{n-1}X_0\right)$ est alors une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et dans cette base, la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En procédant comme dans les cas précédents, avec $Y = P^{-1}X$, on obtient le système :

$$\begin{cases} y'_1 = 0 \\ y'_k = y_{k-1}, \forall k\in[\![2,n]\!] \end{cases} \iff \forall k\in[\![1,n]\!],\ \forall t\in\mathbb{R},\ y_k(t) = c_1t^{k-1}+\dots+c_{k-1}t+c_k = \sum_{i=1}^{k} c_i t^{k-i}.$$

avec $(c_1, c_2, \dots, c_n)\in\mathbb{R}^n$.

Et avec $X = PY$ donne, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i t^{k-i}\right)A^{k-1}X_0 = \sum_{i=1}^{n}\left(c_i\sum_{k=i}^{n} t^{k-i}A^{k-1}X_0\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(c_i\sum_{k=0}^{n-i} t^k A^{k+i-1}X_0\right).$$

Ce qui nous donne :

$$\boxed{S_{(H)} = \mathrm{Vect}\left(t\mapsto\sum_{k=0}^{n-i} t^k A^{k+i-1}X_0, i\in[\![1,n]\!]\right)}$$

3) Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{f}(t) = x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$. On a alors :

$$\vec{f}'(t)\wedge\vec{u} = \left(2y'(t)+z'(t)\right)\vec{i}+\left(z'(t)-2x'(t)\right)\vec{j}-\left(x'(t)+y'(t)\right)\vec{k}.$$

Donc :

$$\vec{f}'\wedge\vec{u} = \vec{f} \iff \begin{cases} 2y'(t)+z'(t) = x(t) \\ z'(t)-2x'(t) = y(t) \\ x'(t)+y'(t) = -z(t) \end{cases}$$

Remarquons que si $\vec{f}$ est solution, on doit avoir $\vec{u}.\vec{f} = 0$, soit $x(t)-y(t)+2z(t) = 0$. Donc :

$$\vec{f}'\wedge\vec{u} = \vec{f} \iff \begin{cases} y(t) = x(t)+2z(t) \\ z'(t)-2x'(t) = x(t)+2z(t) \\ x'(t)+x'(t)+2z'(t) = -z(t) \end{cases} \iff \begin{cases} y(t) = x(t)+2z(t) \\ 6x'(t) = -2x(t)-5z(t) \\ 3z'(t) = x(t)+z(t) \end{cases}$$

Ceci implique que x est deux fois dérivable et $x''(t) = -\dfrac{1}{6}x(t)$. Donc :

$$x(t) = \lambda\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) + \mu\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)$$

avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Avec $z(t) = -\dfrac{2}{5}x(t) - \dfrac{6}{5}x'(t)$ et $y(t) = x(t) + 2z(t)$, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \lambda\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right) + \mu\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right) \\ y(t) = \dfrac{\lambda - 2\mu\sqrt{6}}{5}\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right) + \dfrac{2\lambda\sqrt{6}+\mu}{5}\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right) \\ z(t) = -\dfrac{2\lambda + \mu\sqrt{6}}{5}\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right) + \dfrac{\lambda\sqrt{6} - 2\mu}{5}\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{6}}\right) \end{cases}}$$

On vérifie que $\vec{f} : t \mapsto x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec les valeurs ci-dessus est bien solution.

Exercice 2

1) a. Soient X_1 et X_2 deux solutions sur $\mathbb{R}$ de (S). Par définition, X_1 et X_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $(X_1 \mid X_2)$ l'est aussi avec :

$$(X_1 \mid X_2)' = (X_1' \mid X_2) + (X_1 \mid X_2') = (AX_1 \mid X_2) + (X_1 \mid AX_2) = {}^t(AX_1)X_2 + {}^tX_1(AX_2) = {}^tX_1\,{}^tAX_2 + {}^tX_1AX_2 .$$

Comme A est antisymétrique, on a ${}^tA = -A$ et donc :

$$(X_1 \mid X_2)' = {}^tX_1(-A)X_2 + {}^tX_1AX_2 = -\,{}^tX_1AX_2 + {}^tX_1AX_2 = 0 .$$

Ainsi, la fonction $(X_1 \mid X_2)$ est constante, autrement dit :

$$\boxed{\text{Le produit scalaire de deux solutions de } (S) \text{ est constant.}}$$

b. Soit X une solution sur $\mathbb{R}$ de (S). D'après ce qui précède, la fonction $(X \mid X) = \|X\|^2$ est constante, donc la fonction $\|X\|$ est constante (car toujours positive), ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{Toute solution de } (S) \text{ est bornée.}}$$

2) Remarquons que comme la fonction $t \mapsto \|X(t)\|$ est positive, elle est croissante si et seulement si la fonction $f : t \mapsto \|X(t)\|^2 = \big(X(t) \mid X(t)\big)$ l'est. Comme X est solution de (S) sur $\mathbb{R}$, elle y est dérivable et f aussi et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = 2\big(X'(t) \mid X(t)\big) = 2\big(AX(t) \mid X(t)\big) = 2\big(X(t) \mid AX(t)\big) = 2\,{}^tX(t)AX(t) \geq 0 .$$

Donc :

$$\boxed{\text{Pour toute solution } X \text{ de } (S)\text{, la fonction } t \mapsto \|X(t)\| \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Exercice 3

Supposons que $y''+a(t)y'+b(t)y=0$ admet deux solutions y_1 et y_2 telles que pour tout $t\in I$, $y_2(t)=t\,y_1(t)$.

Alors, pour tout $t\in I$:

$$\begin{cases} y'_2(t)=t\,y'_1(t)+y_1(t) \\ y''_2(t)=t\,y''_1(t)+2y'_1(t) \end{cases}$$

D'où :

$$y''_2(t)+a(t)y'_2(t)+b(t)y_2(t)=t\left[y''_1(t)+a(t)y'_1(t)+b(t)y_1(t)\right]+2y'_1(t)+a(t)y_1(t)=2y'_1(t)+a(t)y_1(t)$$

Comme $y''_2+ay'_2+by_2=0$, on obtient :

$$2y'_1+ay_1=0.$$

Comme a est de classe C^1 sur I, on peut dériver la relation ci-dessus et on obtient :

$$2y''_1+a'y_1+ay'_1=0.$$

Et, avec $2y'_1+ay_1=0$, soit $2y'_1=-ay_1$, et $y''_1+ay'_1+by_1=0$, on peut écrire :

$$\left.\begin{array}{l} 2y''_1+a'y_1+ay'_1=0 \\ y''_1+ay'_1+by_1=0 \\ 2y'_1=-ay_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a^2y_1+2a'y_1=4by_1.$$

Comme y_1 n'est pas nulle sur I mais y est continue, il existe au moins un intervalle $J\subset I$, non réduit à un point, sur lequel y_1 ne s'annule pas. On obtient alors $a^2+2a'=4b$ sur J.

Finalement, une condition nécessaire sur a et b pour que l'équation $y''+a(t)y'+b(t)y=0$ admette deux solutions non nulles y_1 et y_2 telles que pour tout $t\in I$, $y_2(t)=t\,y_1(t)$ est :

$$\boxed{a^2+2a'=4b \text{ sur tout intervalle inclus dans } I \text{ sur lequel } y_1 \text{ ne s'annule pas.}}$$

Supposons que $a^2+2a'=4b$. L'équation se récrit alors :

$$y''+ay'+\frac{1}{4}(a^2+2a')y=0.$$

Posons $z=y'+\frac{1}{2}ay$. On a alors (avec $y''=-ay'-\frac{1}{4}a^2y-\frac{1}{2}a'y$) :

$$z'=y''+\frac{1}{2}ay'+\frac{1}{2}a'y=-ay'-\frac{1}{4}a^2y-\frac{1}{2}a'y+\frac{1}{2}ay'+\frac{1}{2}a'y=-\frac{1}{2}a\left(y'+\frac{1}{2}ay\right)=-\frac{1}{2}az.$$

Donc z est solution de $z'+\frac{1}{2}az=0$, soit, si A est une primitive de a sur I :

$$z:t\mapsto Ke^{-\frac{1}{2}A(t)} \quad \text{avec } K \text{ constante.}$$

Alors, z est solution de $y'+\frac{1}{2}a(t)y=Ke^{-\frac{1}{2}A(t)}$. Les solutions le l'équation sans second membre sont les fonctions $z:t\mapsto Ce^{-\frac{1}{2}A(t)}$ avec C constante.

On cherche une solution particulière de la forme $t\mapsto C(t)e^{-\frac{1}{2}A(t)}$ avec C dérivable sur I. En réinjectant dans l'équation, on obtient $C'(t)=K$ et on peut prendre $C(t)=Kt$.

Ainsi, $t \mapsto e^{-\frac{1}{2}A(t)}$ et $t \mapsto te^{-\frac{1}{2}A(t)}$ sont toutes deux solutions de $y''+ay'+\frac{1}{4}(a^2+2a')y=0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La condition est suffisante.}}$$

Soient (E): $y''+2ty'+(t^2+1)y=te^{-t^2/2}$ et (H): $y''+2ty'+(t^2+1)y=0$.

Posons $a(t)=2t$ et $b(t)=t^2+1$. Les fonctions *a* et *b* sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$a(t)^2+2a'(t)-4b(t)=4t^2+4-4t^2-4=0.$$

La condition ci-dessus est satisfaite. En posant, $A(t)=t^2$, une base de solutions de (H) est :

$$\left(t\mapsto e^{-t^2/2}, t\mapsto te^{-t^2/2}\right).$$

Cherchons une solution particulière de (E) de la forme $t\mapsto g(t)e^{-t^2/2}$ où *g* est deux dérivable sur $\mathbb{R}$.

En réinjectant dans (E), on obtient pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$g''(t)e^{-t^2/2}-2tg'(t)e^{-t^2/2}-g(t)e^{-t^2/2}+t^2g(t)e^{-t^2/2}+2tg'(t)e^{-t^2/2}-2t^2g(t)e^{-t^2/2}+(t^2+1)g(t)e^{-t^2/2}=te^{-t^2/2}.$$

Soit :

$$g''(t)=t.$$

On peut prendre $g(t)=\frac{1}{6}t^3$ et une solution particulière est $t\mapsto\frac{1}{6}t^3e^{-t^2/2}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } t\mapsto\left(\frac{1}{6}t^3+\alpha t+\beta\right)e^{-t^2/2} \text{ avec } (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.}$$

Exercice 4

1) Comme $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, on a $\alpha\neq 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\alpha f(x)\right]=\ell$, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $A_1\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in[A_1,+\infty[$:

$$\left|f'(x)+\alpha f(x)-\ell\right|\leq\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|e^{\alpha x}f'(x)+\alpha e^{\alpha x}f(x)-\ell e^{\alpha x}\right|\leq\varepsilon\left|e^{\alpha x}\right|=\varepsilon\, e^{\mathrm{Re}(\alpha)x}.$$

Alors, pour tout $x\in[A,+\infty[$:

$$\left|\int_{A_1}^{x}\left(e^{\alpha t}f'(t)+\alpha e^{\alpha t}f(t)-\ell e^{\alpha t}\right)dt\right|\leq\int_{A_1}^{x}\left|e^{\alpha t}f'(t)+\alpha e^{\alpha t}f(t)-\ell e^{\alpha t}\right|dt\leq\int_{A_1}^{x}\varepsilon\, e^{\mathrm{Re}(\alpha)t}dt.$$

Soit :

$$\left|e^{\alpha x}f(x)-\frac{\ell}{\alpha}e^{\alpha x}-e^{\alpha A_1}f(A)+\frac{\ell}{\alpha}e^{\alpha A_1}\right|\leq\varepsilon\frac{e^{\mathrm{Re}(\alpha)x}-e^{\mathrm{Re}(\alpha)A_1}}{\mathrm{Re}(\alpha)}\leq\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}e^{\mathrm{Re}(\alpha)x}.$$

Ceci implique que :

$$\left|f(x)-\frac{\ell}{\alpha}-B\,e^{-\alpha x}\right|\leq\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}$$

avec $B = e^{\alpha A_1}\left(f(A_1) - \dfrac{\ell}{\alpha}\right)$.

Alors, pour tout $x \in [A_1, +\infty[$:

$$\left|f(x) - \frac{\ell}{\alpha}\right| = \left|f(x) - \frac{\ell}{\alpha} - B\,e^{-\alpha x} + B\,e^{-\alpha x}\right| \le \left|f(x) - \frac{\ell}{\alpha} - B\,e^{-\alpha x}\right| \le \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)} + |B|\,e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}.$$

Or, comme $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} |B|\,e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x} = 0$ et donc, il existe $A_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [A_2, +\infty[$:

$$|B|\,e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x} \le \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}.$$

Finalement, en posant $A = \max(A_1, A_2)$, on a pour tout $x \in [A, +\infty[$:

$$\left|f(x) - \frac{\ell}{\alpha}\right| \le \frac{2\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\ell}{\alpha}}$$

2) Cherchons $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $f'' + f' + f = (f' + af)' + b(f' + af)$.

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a $(f' + af)' + b(f' + af) = f'' + (a+b)f' + abf$, donc pour $a + b = ab = 1$, on a la relation voulue.

Or, si a et b vérifient $a + b = ab = 1$, ils sont racines de $X^2 - X + 1$, donc valent $\alpha = e^{i\pi/3}$ ou $\overline{\alpha} = e^{-i\pi/3}$.
On a alors :

$$f'' + f' + f = (f' + \alpha f)' + \overline{\alpha}(f' + \alpha f).$$

Et, comme $\mathrm{Re}(\alpha) = \mathrm{Re}(\overline{\alpha}) = \dfrac{1}{2} > 0$, on peut appliquer deux fois la question précédente :

$$\lim_{+\infty}\left[f'' + f' + f\right] = \lim_{+\infty}\left[(f' + \alpha f)' + \overline{\alpha}(f' + \alpha f)\right] = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{+\infty}(f' + \alpha f)' = \frac{0}{\overline{\alpha}} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} f = \frac{0}{\overline{\alpha}} = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

3) Nous allons faire une preuve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant le même principe que ci-dessus.

- Pour $n = 1$, soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty}\left[f' + \alpha f\right] = 0$ où toutes les racines de $P = X + \alpha \in \mathbb{C}[X]$ ont une partie réelle strictement négative, autrement dit ici : $\mathrm{Re}(-\alpha) < 0$, soit $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

  D'après la question 1, on a immédiatement $\lim\limits_{+\infty} f = 0$: la propriété est vraie au rang $n = 1$.

- On suppose la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}^*$.

  Soit $f\in C^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty}\left[f^{(n+1)}+\alpha_n f^{(n)}+\alpha_{n-1}f^{(n-1)}+...+\alpha_1 f'+\alpha_0 f\right]=0$ où les α_k sont des nombres complexes tels que toutes les racines de $P=X^{n+1}+\alpha_n X^n+...+\alpha_1 X+\alpha_0$ ont une partie réelle strictement négative.

  Soit $-\alpha$ une racine de *P*. On a alors $\mathrm{Re}(-\alpha)<0$, donc $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ et :

$$\begin{aligned}P&=\left(X+\alpha\right)\left(X^n+\beta_{n-1}X^{n-1}+...+\beta_1 X+\beta_0\right)\\&=X^{n+1}+(\alpha+\beta_{n-1})X^n+(\alpha\beta_{n-1}+\beta_{n-2})X^{n-1}+...+(\alpha\beta_1+\beta_0)X+\alpha\beta_0\\&=X^{n+1}+\alpha_n X^n+...+\alpha_1 X+\alpha_0\end{aligned}$$

  Et toutes les racines de $X^n+\beta_{n-1}X^{n-1}+...+\beta_1 X+\beta_0$ sont des racines de *P*, donc ont une partie réelle strictement négative.

  Posons $g=f^{(n)}+\beta_{n-1}f^{(n-1)}+...+\beta_1 f'+\beta_0 f$. On a alors :

$$\begin{aligned}g'+\alpha g&=f^{(n+1)}+\beta_{n-1}f^{(n)}+...+\beta_1 f''+\beta_0 f'+\alpha f^{(n)}+\alpha\beta_{n-1}f^{(n-1)}+...+\alpha\beta_1 f'+\alpha\beta_0 f\\&=f^{(n+1)}+(\beta_{n-1}+\alpha)f^{(n)}+(\beta_{n-2}+\alpha\beta_{n-1})f^{(n)}+...+(\beta_1+\alpha\beta_2)f''+(\beta_0+\alpha\beta_1)f'+\alpha\beta_0 f\\&=f^{(n+1)}+\alpha_n f^{(n)}+\alpha_{n-1}f^{(n-1)}+...+\alpha_1 f'+\alpha_0 f\end{aligned}$$

  Donc, $\lim\limits_{+\infty}\left[g'+\alpha g\right]=0$ et comme $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, on a $\lim\limits_{+\infty}g=0$ d'après la question 1.

  Ainsi, $\lim\limits_{+\infty}\left[f^{(n)}+\beta_{n-1}f^{(n-1)}+...+\beta_1 f'+\beta_0 f\right]=0$ et toutes les racines de $X^n+\beta_{n-1}X^{n-1}+...+\beta_1 X+\beta_0$ ont une partie réelle strictement négative, donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\lim\limits_{+\infty}f=0$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Ainsi, si *f* est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) telle que $\lim\limits_{+\infty}\left[f^{(n)}+\alpha_{n-1}f^{(n-1)}+...+\alpha_1 f'+\alpha_0 f\right]=0$ où les racines de $P=X^n+\alpha_{n-1}X^{n-1}+...+\alpha_1 X+\alpha_0\in\mathbb{C}[X]$ ont toutes une partie réelle strictement négative, alors :

$$\boxed{\lim_{+\infty}f=0}$$

Exercice 5

Posons $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=\frac{\dfrac{1}{2n+1}\dbinom{2n+2}{n+1}}{\dfrac{1}{2n-1}\dbinom{2n}{n}}|x|=\frac{2n-1}{2n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x|=2\frac{2n-1}{n+1}|x|\xrightarrow[n\to+\infty]{}4|x|.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série converge quand $4|x|<1$ et diverge quand $4|x|>1$, donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } f \text{ est } \frac{1}{4}.}$$

La série entière *f* est alors de classe C^{∞} sur $I = \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n+1}\binom{2(n+1)}{n+1}(n+1)x^{n}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}(n+1)x^{n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\binom{2n}{n}x^{n}$$

Mais, on peut aussi écrire :

$$2xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{2n-1}\binom{2n}{n}x^{n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{2n-1}\binom{2n}{n}x^{n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\binom{2n}{n}x^{n}.$$

Comme on vient de voir que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}x^{n}$ converge, on obtient, avec le résultat précédent :

$$2xf'(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\binom{2n}{n}x^{n} = f(x) - \frac{1}{2}f'(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, $(4x+1)f'(x) - 2f(x) = 0$, donc *f* est solution sur *I* de :

$$(E) :\ (4x+1)y' - 2y = 0.$$

Pour tout $x \in I$, $4x+1 \neq 0$, donc l'équation se récrit $y' - \frac{2}{4x+1}y = 0$ et les solutions sont de la forme :

$$x \mapsto K\exp\left(\int^{x}\frac{2}{4t+1}dt\right) = K\exp\left(\frac{1}{2}\left(4x+1\right)\right) = K\sqrt{4x+1}.$$

De plus, avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}x^{n}$, on a $f(0) = \frac{-1}{-1} = 1$, donc, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$:

$$\boxed{f(x) = \sqrt{4x+1}}$$

A l'aide de la formule de Stirling, on peut écrire :

$$\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{2n}\frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,n^{1,5}}.$$

Comme la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^{1,5}}$ converge ($1,5 > 1$), la série $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ est absolument convergente. Ceci implique que la convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}x^{n}$ est normale sur $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$ et donc que *f* est définie et continue sur ce segment et, entre autres, en $\frac{1}{4}$. Alors :

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = \sqrt{4\frac{1}{4}+1} = \sqrt{2}.$$

Par ailleurs, on a vu plus haut que pour tout entier naturel n, on a :

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n} = 2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{2n+1}2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}.$$

Et, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^{N}2\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}} = 2\sum_{n=1}^{N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = 2\sum_{n=0}^{N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} - 2.$$

Comme la série $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ converge, la série $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ converge aussi et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} - 2.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = 2(\sqrt{2}-1)}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}x^n = f(x) - 2xf'(x)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}x^{n+1} = \int_0^x\left[f(t)-2tf'(t)\right]dt = 3\int_0^x f(t)\,dt - 2\int_0^x\left[f(t)+tf'(t)\right]dt$$

$$= 3\int_0^x\sqrt{4t+1}\,dt - 2\left[tf(t)\right]_0^x = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}(4t+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x - 2\left[t\sqrt{4t+1}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}\left[(4x+1)\sqrt{4x+1}-1\right] - 2x\sqrt{4x+1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{2}\left[\left(4\frac{1}{4}+1\right)\sqrt{4\frac{1}{4}+1}-1\right] - 2\frac{1}{4}\sqrt{4\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}-1\right]$$

Exercice 6

<u>Première intégrale</u>

Posons $f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$.

<u>Définition</u> :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $0 < \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \le \frac{1}{1+t^2}$.

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$ converge aussi et ainsi :

$$f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+ .$$

Continuité :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Avec l'hypothèse de domination vue ci-dessus, on peut conclure que :

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+ .$$

Dérivabilité :

- La fonction $x \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, de dérivées successives $x \mapsto -\frac{te^{-tx}}{1+t^2}$ et $x \mapsto \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}$.
- Les fonctions $t \mapsto -\frac{te^{-tx}}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|-\frac{te^{-tx}}{1+t^2}\right| = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-tx})$ et $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $t \mapsto -\frac{te^{-tx}}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in [a,+\infty[$, on a $\left|\frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\right| \le e^{-ta}$ et $t \mapsto e^{-ta}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, f est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ avec } f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}dt .$$

Remarquons alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2-1)e^{-tx}}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_0^{+\infty} - f(x) = \frac{1}{x} - f(x).$$

Ainsi, f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de :

$$(E):\ y'' + y = \frac{1}{x}.$$

Par ailleurs, soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, on a par intégration par parties :

$$\int_0^A \frac{\sin t}{t+x}dt = \left[-\frac{\cos t}{t+x}\right]_0^A - \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2}dt = \frac{1}{x} - \frac{\cos A}{A+x} - \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2}dt .$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|\frac{\cos t}{(t+x)^2}\right| \le \frac{1}{(t+x)^2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2}$ converge, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}dt$ converge.

Comme $\lim_{A\to+\infty} \frac{\cos A}{A+x} = 0$, on peut conclure que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}dt .$$

Seconde intégrale

Posons alors pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}dt$.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t\mapsto\frac{\sin t}{t+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a vu que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}dt$ converge.
- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la fonction $x\mapsto\frac{\sin t}{t+x}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées première et seconde :
$$x\mapsto-\frac{\sin t}{(t+x)^2}\ \text{ et }\ x\mapsto\frac{2\sin t}{(t+x)^3}.$$
- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, les fonctions $t\mapsto-\frac{\sin t}{(t+x)^2}$ et $t\mapsto\frac{2\sin t}{(t+x)^3}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $x\in[a,+\infty[$, on a, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:
$$\left|\frac{\sin t}{(t+x)^2}\right|\le\frac{1}{(t+a)^2}\ \text{ et }\ \left|\frac{2\sin t}{(t+x)^3}\right|\le\frac{2}{(t+a)^3}.$$
Comme $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+a)^2}$ et $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+a)^3}$ convergent, les hypothèses de domination sont vérifiées.

On peut donc conclure que :

$$g\text{ est de classe }C^2\text{ sur }\mathbb{R}_+^*\text{ avec }g''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin t}{(t+x)^3}dt.$$

Or, pour tout $A\in\mathbb{R}_+^*$, on a en faisant deux par intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}\int_0^A\frac{2\sin t}{(t+x)^3}dt&=\left[-\frac{\sin t}{(t+x)^2}\right]_0^A+\int_0^A\frac{\cos t}{(t+x)^2}dt\\&=\left[-\frac{\sin t}{(t+x)^2}\right]_0^A+\left[-\frac{\cos t}{t+x}\right]_0^A-\int_0^A\frac{\sin t}{t+x}dt\\&=-\frac{\sin A}{(A+x)^2}-\frac{\cos A}{A+x}+\frac{1}{x}-\int_0^A\frac{\sin t}{t+x}dt\end{aligned}$$

Et en passant à la limite quand $A\to+\infty$, on obtient :

$$g''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin t}{(t+x)^3}dt=\frac{1}{x}-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}dt=\frac{1}{x}-g(x).$$

Ainsi, la fonction g est elle aussi solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E).

Alors, $f-g$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $y''+y=0$, donc il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)-g(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x=K\cos(x-\varphi)$$

avec $K=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, $\cos\varphi=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$ et $\sin\varphi=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$.

Enfin :

- $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $|f(x)|=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt\le\int_0^{+\infty}e^{-tx}dt=\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$;

- $\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\ \left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{(t+x)^2}dt\right|\le\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+x)^2}=\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{(t+x)^2}dt=0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=0$

  car $g(x)=\frac{1}{x}-\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{(t+x)^2}dt$.

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}K\cos(x-\varphi)=0$ et la seule possibilité pour obtenir cela est d'avoir $K=0$ (car la fonction cosinus n'admet pas de limite en + ∞).

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)-g(x)=0$, soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}dt}$$

Exercice 7

1) Si y est une solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ de (E), alors il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $|y(x)|\le M$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $|y(x)f(x)|\le M\,|f(x)|$ et comme *f* est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison :

$$\boxed{y f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ .}$$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $y''(x)=-f(x)y(x)$ et comme *y* et *f* sont continues (*y* est deux fois dérivable, donc continue car solution de (E) et *f* est continue par hypothèse), y'' est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$y'(x)=y'(0)+\int_0^x y''(t)\,dt=y'(0)-\int_0^x f(t)y(t)\,dt\,.$$

Comme *f* est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on a $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)y(t)\,dt=\int_0^{+\infty}f(t)y(t)\,dt\in\mathbb{R}$ et donc :

$$\boxed{y' \text{ admet une limite finie en } +\infty.}$$

Notons ℓ cette limite et supposons que $\ell\neq 0$. Quitte à changer *y* et – *y*, qui vérifie les mêmes hypothèses (car l'équation (E) est linéaire et homogène), supposons $\ell>0$.

Alors, $\frac{\ell}{2}>0$ et il existe $A\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x\in[A,+\infty[$:

$$|y'(x)-\ell|\le\frac{\ell}{2}\ \Leftrightarrow\ -\frac{\ell}{2}\le y'(x)-\ell\le\frac{\ell}{2}\ \Rightarrow\ y'(x)\ge\frac{\ell}{2}.$$

Alors, pour tout $x\in[A,+\infty[$:

$$\int_A^x y'(t)\,dt\ge\int_A^x\frac{\ell}{2}dt\ \Rightarrow\ y(x)\ge\frac{\ell}{2}(x-A)+y(A)\,.$$

Ceci est absurde car $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell}{2}(x-A)+y(A)=+\infty$ et *y* est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc $\ell=0$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}y'(x)=0}$$

2) Si les fonctions y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), alors, on a vu plus haut qu'elles elles sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$ est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ en tant que différence de telles fonctions. Avec $y_1'' = -f\, y_1$ et $y_2'' = -f\, y_2$, on a :

$$W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1(-f\, y_2) - (-f\, y_1)\, y_2 = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } W \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+.}$$

Supposons que toutes les solutions de (E) sont bornées.

Comme (E) est une équation linéaire, homogène d'ordre 2, l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Soit (y_1, y_2) une base de cet espace. Comme y_1 et y_2 sont deux solutions bornées de (E), alors $\lim\limits_{x \to +\infty} y_1'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} y_2'(x) = 0$, donc (avec y_1 et y_2 bornées) :

$$\lim_{x \to +\infty} y_1'(x)\, y_2(x) = \lim_{x \to +\infty} y_2'(x)\, y_1(x) = 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} W(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) \right] = 0$ et comme la fonction W est constante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ W(x) = 0.$$

La fonction y_2 n'est pas nulle (elle fait partie d'une base), donc il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y_2(a) \neq 0$ et comme elle est continue, il existe un intervalle I de $\mathbb{R}_+$ contenant a et sur lesquels y_2 ne s'annule pas.
On a alors pour tout $x \in I$, $y_2(x) \neq 0$ et :

$$\left(\frac{y_1}{y_2} \right)' = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_2^2} = \frac{W}{y_2^2} = 0.$$

Donc, $\dfrac{y_1}{y_2}$ est constante sur I, soit $y_1 = k\, y_2$ sur I, où k est une constante réelle.
Comme $a \in I$, on a $y_1(a) = k\, y_2(a)$ et $y_1'(a) = k\, y_2'(a)$, y_1 et $k\, y_2$ sont deux solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

Or, le problème de Cauchy composée de l'équation linéaire d'ordre 2 (E) et des conditions initiales $y(a) = y_1(a)$ et $y'(a) = y_1'(a)$ admet une unique solution, et donc $y_1 = k\, y_2$ sur $\mathbb{R}_+$. Ceci veut dire que (y_1, y_2) est liée. Ceci est absurde car (y_1, y_2) est une base.

Finalement, supposer que toutes les solutions de (E) sont bornées mène à une contradiction, donc :

$$\boxed{\text{L'équation différentielle } (E) \text{ admet des solutions non bornées.}}$$

Exercice 8

Procédons par analyse-synthèse.

Analyse

Soit f une éventuelle solution du problème : f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x} \right)$.

Remarquons que l'on peut alors écrire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'\left(\dfrac{1}{x} \right) = f(x)$.

Alors, f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable et à images dans $\mathbb{R}_+^*$ par *f* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

Ainsi, *f* est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de :

$$(E):\ y'' + \frac{1}{x^2} y = 0.$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire, homogène d'ordre 2, donc l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

Cherchons une éventuelle solution *g* de (E) de la forme $g : x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} = -\frac{1}{x^2} g(x) = -x^{\alpha-2}.$$

Donc, $\alpha(\alpha-1) = -1$, soit $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ et donc : $\alpha = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

En prenant $\alpha = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(x) = x^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = x^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x} = \sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + i\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right).$$

Comme *g* est solution de (E), qui est à coefficients réels, $\mathrm{Re}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont des solutions réelles de (E).

Ces deux fonctions n'étant par proportionnelles, elles forment une famille libre et donc, une base de l'espace des solutions de (E).

Ainsi, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = A\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right).$$

Ainsi, toute éventuelle solution du problème est de la forme $x \mapsto A\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$ où *A* et *B* sont deux constantes réelles.

Synthèse

Soient $A, B \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto A\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que combinaison linéaire de telles fonctions pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x)=A\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)-A\sqrt{x}\frac{\sqrt{3}}{2x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+B\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+B\sqrt{x}\frac{\sqrt{3}}{2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{A+B\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)-\frac{A\sqrt{3}-B}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=A\sqrt{\frac{1}{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)+B\sqrt{\frac{1}{x}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[A\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+B\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)-B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$$

Ainsi, on a $f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si :

$$\begin{cases}\dfrac{A+B\sqrt{3}}{2}=A\\[2mm]\dfrac{A\sqrt{3}-B}{2}=B\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad A=\sqrt{3}B\ .$$

Et, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=\sqrt{3}B\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+B\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)=2B\sqrt{x}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$$

$$=2B\sqrt{x}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]=2B\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x-\frac{\pi}{6}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions du problème sont les fonctions } x\mapsto\lambda\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x-\frac{\pi}{6}\right)\text{ avec }\lambda\in\mathbb{R}.}$$