

Corrigés des TD du chapitre 19

Exercice 1

1) Remarquons préalablement que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $\left| t \cos\left(\frac{\alpha}{t}\right) \right| \leq |t|$ et $\left| t \sin\left(\frac{\alpha}{t}\right) \right| \leq |t|$, donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[t \cos\left(\frac{\alpha}{t}\right) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[t \sin\left(\frac{\alpha}{t}\right) \right] = 0.$$

La fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\}$ en tant que produit de

telles fonctions avec pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, 0) - f(a, 0)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a, 0)$ existe et vaut 0.
- $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(a, y) - f(a, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[y \sin\left(\frac{a}{y}\right) \right] = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(a, 0)$ existe et vaut 0.

Ainsi, f admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 .

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

A l'aide de ce que l'on vu en introduction, on a :

- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a, 0)$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(a, 0)$;
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, 0)} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, mais $x \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ n'admet pas de limite quand $(x, y) \rightarrow (a, 0)$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'admet pas de limite quand $(x, y) \rightarrow (a, 0)$.

Ainsi, f n'est pas de classe C^1 en $(a, 0)$ quand $a \in \mathbb{R}^*$.

Par contre, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} y \cos\left(\frac{x}{y}\right) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \cos\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, donc :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Ainsi, f est de classe C^1 en $(0, 0)$.

Finalement :

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \cup \{(0, 0)\}$, mais pas plus.

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe, c'est la dérivée de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ en 0. Or, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ n'est pas définie, donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ n'existe pas.}}$$

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe, c'est la dérivée de $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y$ en 0, soit 1. Donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \text{ existe et vaut } 1.}$$

2) La fonction sh étant une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on a :

$$\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ où Δ est la première bissectrice (d'équation $x = y$) en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$:

$$f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y} = \frac{2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2 \operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

avec $\phi(t) = \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t}$ et $\varphi(t) = \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}$.

Remarquons que les fonctions ϕ et φ sont toutes deux des fonctions d'une seule variable réelle et on a :

- Les fonctions $(x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}$ et $(x, y) \mapsto \frac{x-y}{2}$ sont polynomiales, donc de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
- La fonction ϕ est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} (la fonction ch ne s'annulant pas sur \mathbb{R}).
- La fonction φ est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}^* (la fonction sh ne s'annulant qu'en 0).

De plus, en 0, on a $\varphi(t) \underset{0}{\sim} 1$ donc φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(t) = \frac{\cos t \operatorname{sh} t - \sin t \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}$ et, au voisinage de 0, on a $\varphi'(t) = \frac{o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)}$, donc

φ' admet une limite finie en 0 (qui est 0) et le prolongement de φ est de classe C^1 en 0, donc sur \mathbb{R} .

Ainsi, par composition, $(x, y) \mapsto \phi\left(\frac{x+y}{2}\right)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et $(x, y) \mapsto \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un prolongement de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 2

1) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$f(P) = \int_0^1 P^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k \right)^2 dt = \int_0^1 \left(\sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i a_j t^{i+j} \right) dt = \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i a_j \int_0^1 t^{i+j} dt = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{1}{i+j+1} a_i a_j.$$

Ainsi, f est polynômiale sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc :

f est différentiable sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$f(P) = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i, j \neq k}} \frac{1}{i+j+1} a_i a_j + 2 \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{i+k+1} a_i a_k + \frac{1}{2k+1} a_k^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a_k}(P) = \sum_{i=0}^n \frac{2}{i+k+1} a_i.$$

Donc, pour tout $H = \sum_{k=0}^n h_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, $df(P) \cdot H = \sum_{j=0}^n \left(h_j \sum_{i=0}^n \frac{2}{i+j+1} a_i \right)$, soit :

$$df(P) \cdot H = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{2a_i h_j}{i+j+1}$$

Autre version (plus chic !) :

Munissons $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 PQ$ (on peut choisir le produit scalaire que l'on veut car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie). On a alors $f(P) = \int_0^1 P^2 = \|P\|^2$ et pour tous $P, H \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$f(P+H) = \|P+H\|^2 = \|P\|^2 + 2(P|H) + \|H\|^2 = f(P) + 2(P|H) + o(\|H\|).$$

Ceci prouve que :

$$df(P) \cdot H = 2(P|H) = 2 \int_0^1 PH$$

Remarquons qu'avec $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $H = \sum_{k=0}^n h_k X^k$, on a $2 \int_0^1 PH = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{2a_i h_j}{i+j+1}$.

2) Remarquons que $A \mapsto \det A$ est polynômiale en les coefficients de A , donc continue. Alors, $\det^{-1}(\{0\})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (car $\{0\}$ est fermé dans \mathbb{R}), donc $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \det^{-1}(\{0\})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

Comme A est inversible, 0 n'est pas valeur propre de A , donc $\chi_A(0) = a_0 \neq 0$. Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I_n = 0_n$, donc :

$$-\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I_n)A = I_n \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I_n).$$

Or, $\chi_A = \det(XI_n - A)$, donc les a_k sont polynômiaux en les coefficients de A . Comme les coefficients des puissances de A , sont aussi polynômiaux en les coefficients de A , les coefficients de A^{-1} sont polynômiaux en les coefficients de A .

Enfin, les fonctions polynômiales sont différentiables sur leur ensemble de définition, donc :

f est différentiable sur son ensemble de définition.

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $A + tE_{i,j} \in GL_n(\mathbb{R})$ pour t réel proche de 0 (car $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert) et :

$$\frac{1}{t} [f(A + tE_{i,j}) - f(A)] = \frac{1}{t} [(A + tE_{i,j})^{-1} - A^{-1}] = \frac{1}{t} (A + tE_{i,j})^{-1} (I_n - (A + tE_{i,j})A^{-1}) = -(A + tE_{i,j})^{-1} E_{i,j} A^{-1}.$$

Alors, $\frac{\partial f}{\partial a_{i,j}}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} [f(A + tE_{i,j}) - f(A)] \right) = -A^{-1} E_{i,j} A^{-1}$ et donc pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$df(A)(E_{i,j}) = -A^{-1} E_{i,j} A^{-1}.$$

Et ainsi :

$$df(A) : M \mapsto -A^{-1} M A^{-1}$$

3) Soit $(x, h) \in E^2$. On a :

$$f(x+h) = (x+h | u(x+h)) = (x+h | u(x) + u(h)) = (x | u(x)) + (h | u(x)) + (x | u(h)) + (h | u(h)).$$

Comme u est symétrique, $(x | u(h)) = (h | u(x))$ donc :

$$f(x+h) = f(x) + 2(h | u(x)) + (h | u(h)).$$

Et comme u est un endomorphisme réel symétrique, il est diagonalisable, donc il existe une base orthonormée (e_1, e_2, \dots, e_n) de E dans laquelle, si $h = h_1 e_1 + h_2 e_2 + \dots + h_n e_n$, on a $u(h) = h_1 \lambda_1 e_1 + h_2 \lambda_2 e_2 + \dots + h_n \lambda_n e_n$ et, en posant $m = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|)$, on obtient :

$$\|u(h)\| = \sqrt{h_1^2 \lambda_1^2 + h_2^2 \lambda_2^2 + \dots + h_n^2 \lambda_n^2} \leq m \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2} = m \|h\|.$$

Alors, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(h | u(h))| \leq \|h\| \cdot \|u(h)\| \leq m \|h\|^2 \Rightarrow (h | u(h)) = o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

Ainsi :

$$f(x+h) = f(x) + 2(h | u(x)) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

Donc :

f est différentiable sur E et pour tout $x \in E$, $df(x) : h \mapsto 2(h | u(x))$

Soit $(x, h) \in E^2$ tel que $x \neq 0$ et $x+h \neq 0$. On a :

$$g(x+h) = \frac{(x+h | u(x+h))}{(x+h | x+h)} = \frac{(x | u(x)) + 2(h | u(x)) + (h | u(h))}{(x | x) + 2(h | x) + (h | h)} = \frac{(x | u(x)) + 2(h | u(x)) + (h | u(h))}{(x | x) \left[1 + 2 \frac{(h | x)}{(x | x)} + \frac{(h | h)}{(x | x)} \right]}$$

Or :

$$\left(2\frac{(h|x)}{(x|x)} + \frac{(h|h)}{(x|x)}\right)^2 \leq \frac{1}{\|x\|^4} (2|(h|x)| + |(h|h)|)^2 \leq \frac{1}{\|x\|^4} (2\|x\| \cdot \|h\| + \|h\|^2)^2 \leq \|h\|^2 \frac{(2\|x\| + \|h\|)^2}{\|x\|^4}.$$

Donc $\left(2\frac{(h|x)}{(x|x)} + \frac{(h|h)}{(x|x)}\right)^2 = o_{h \rightarrow 0}(\|h\|)$ et :

$$g(x+h) = \frac{f(x) + 2(h|u(x)) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|)}{(x|x)} \left[1 - 2\frac{(h|x)}{(x|x)} + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|)\right] = g(x) + 2\frac{(h|u(x)) - (h|x)g(x)}{(x|x)} + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

Donc :

$$g \text{ est différentiable sur } E \setminus \{0\} \text{ et pour tout } x \in E \setminus \{0\}, dg(x) : h \mapsto 2\frac{(h|u(x)) - (h|x)g(x)}{(x|x)}$$

Soit $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $dg(a) = 0$, soit pour tout $h \in E$:

$$(h|u(a)) - (h|a)g(a) \Leftrightarrow (h|u(a) - g(a)a) = 0.$$

En posant $\lambda = g(a) \in \mathbb{R}$, ceci revient à $u(a) = \lambda a$ et donc, a (qui est non nul) est vecteur propre de u .

Réciproquement, si $a \in E \setminus \{0\}$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ , alors :

$$u(a) - g(a)a = u(a) - \frac{(a|u(a))}{(a|a)}a = \lambda a - \frac{(a|\lambda a)}{(a|a)}a = \lambda a - \lambda \frac{(a|a)}{(a|a)}a = 0.$$

Et donc, $dg(a) = 0$.

Ainsi :

$$dg(a) = 0 \text{ si et seulement si } a \text{ est un vecteur propre de } u.$$

Exercice 3

Comme φ admet un maximum local en $(u(a), v(b))$, il existe une boule ouverte B , de centre $(u(a), v(b))$ et de rayon $r > 0$, telle que :

$$\forall (X, Y) \in B, \varphi(X, Y) \leq \varphi(u(a), v(b)).$$

Par ailleurs, u et v sont continues respectivement en a et b donc $(x, y) \mapsto (u(x), v(y))$ est continue en (a, b) .

Ceci implique qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in B((a, b), \alpha)$:

$$(u(x), v(y)) \in B.$$

Alors, pour tout $(x, y) \in B((a, b), \alpha)$, on a :

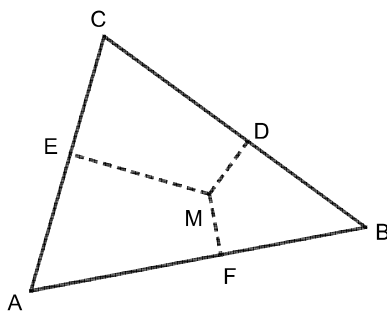
$$f(x, y) = \varphi(u(x), v(y)) \leq \varphi(u(a), v(b)).$$

Ceci montre que :

$$f \text{ admet un maximum local en } (a, b).$$

Exercice 4

Faisons un schéma. On note D , E et F les projetés orthogonaux de M sur (BC) , (AC) et (AB) respectivement.



On cherche le maximum de $MD \times ME \times MF$.

Appelons S l'aire du triangle ABC . On a :

$$S = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = \frac{1}{2}(MD \times BC + ME \times AC + MF \times AB).$$

Posons $x = MD$ et $y = ME$. On a alors $x, y \in \mathbb{R}_+$ et $MF = \frac{2S - MD \times BC - ME \times AC}{AB}$, donc :

$$MD \times ME \times MF = \frac{MD \times ME \times (2S - MD \times BC - ME \times AC)}{AB}.$$

Et $MD \times ME \times MF$ est maximal quand $MD \times ME \times (2S - MD \times BC - ME \times AC)$ l'est.

Posons $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et :

$$f(x, y) = MD \times ME \times (2S - MD \times BC - ME \times AC) = xy(2S - ax - by) = 2Sxy - ax^2y - bxy^2.$$

La fonction f est polynômiale donc de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2Sy - 2axy - by^2 = y(2S - 2ax - by) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2Sx - ax^2 - 2bxy = x(2S - ax - 2by) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y(2S - 2ax - by) = 0 \\ x(2S - ax - 2by) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } 2ax + by = 2S \\ x = 0 \text{ ou } ax + 2by = 2S \end{cases}$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $f(x, y) = 0$ donc f est minimale (car $f(x, y)$ est toujours positif : c'est un produit de distances). On s'intéresse donc à l'unique point critique (x, y) tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, qui est donnée par :

$$\begin{cases} 2ax + by = 2S \\ ax + 2by = 2S \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b} \right).$$

Alors :

$$f\left(\frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b}\right) = \frac{8S^3}{27ab}.$$

Or, on peut écrire pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$f(x, y) = 2Sxy - ax^2y - bxy^2 = \frac{y(by - 2S)^2}{4a} - ay\left(x + \frac{by - 2S}{2a}\right)^2 \leq \frac{y(by - 2S)^2}{4a} = \frac{1}{4a}g(y).$$

Remarquons que comme M reste à l'intérieur du triangle ABC , $y = ME$ reste inférieur à la longueur h de la hauteur issue de B . Or, $S = \frac{h \times AC}{2} = \frac{hb}{2}$, donc $h = \frac{2S}{b}$. Ainsi, $y \in \left[0, \frac{2S}{b}\right]$.

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}_+ avec $g'(y) = (by - 2S)^2 + 2by(by - 2S) = (3by - 2S)(by - 2S)$.

On a alors le tableau :

y	0	$\frac{2S}{3b}$	$\frac{2S}{b}$
$g'(y)$	+	0	- 0
g	↗		↘

Ainsi, g est maximale quand $y = \frac{2S}{3b}$ et donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $y \in \left[0, \frac{2S}{b}\right]$, on a :

$$f(x, y) \leq \frac{1}{4a} g(y) \leq \frac{1}{4a} g\left(\frac{2S}{3b}\right) = \frac{8S^3}{27ab}.$$

Finalement, $\frac{8S^3}{27ab}$ est le maximum de f atteint quand $x = MD = \frac{2S}{3a}$ et $y = ME = \frac{2S}{3b}$, et dans ce cas, avec $c = AB$, on obtient :

$$MF = \frac{2S - MD \times BC - ME \times AC}{AB} = \frac{2S}{3c}.$$

Ainsi :

Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle est $\frac{8S^3}{27AB \times BC \times CA}$, atteint quand $d(M, (BC)) = \frac{2S}{3BC}$, $d(M, (AC)) = \frac{2S}{3AC}$ et $d(M, (AB)) = \frac{2S}{3AB}$.

Remarquons que le point M ci-dessus est le centre de gravité G de ABC .

En effet, si, comme plus haut, D est le projeté orthogonal de G sur (BC) , on a $S_{GBC} = \frac{BC \times GD}{2}$, donc :

$$GD = \frac{2S_{GBC}}{BC}.$$

Or, si \mathcal{B} une base orthonormée directe du plan, on a :

$$2S_{GBC} = \left[\overline{BC}, \overline{BG} \right] = \left| \det_{\mathcal{B}}(\overline{BC}, \overline{BG}) \right| = \left| \det_{\mathcal{B}}\left(\overline{BC}, \frac{1}{3}(\overline{BA} + \overline{BC})\right) \right| = \left| \det_{\mathcal{B}}\left(\overline{BC}, \frac{1}{3}\overline{BA}\right) \right| = \frac{1}{3} \left| \det_{\mathcal{B}}(\overline{BC}, \overline{BA}) \right| = \frac{1}{3} 2S.$$

Donc :

$$GD = d(G, (BC)) = \frac{2S}{3BC}.$$

Et on a de même, $d(G, (AC)) = \frac{2S}{3AC}$ et $d(G, (AB)) = \frac{2S}{3AB}$.

Exercice 5

1) On a $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Commençons par considérer la fonction $h : (x, y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , donc :

$$y \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Soit maintenant $y \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $I = [0, y]$ ou $[y, 0]$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue et intégrable sur le segment I .
- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$ est continue sur I .
- Pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$ est continue sur $[a, b]$, donc y admet un maximum et $t \mapsto \max_{x \in [a, b]} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right]$ est continue sur le segment I , donc intégrable.

Alors, $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ est de classe C^1 sur $[a, b]$, de dérivée $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt$.

Ceci étant vrai pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , de dérivée

$x \mapsto \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt$. Or, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, t)$, donc :

$$\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt = -\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, t) dt = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, t) \right]_0^y = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0).$$

Enfin, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R} , donc $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt$ l'est aussi en tant que différence de telles fonctions et finalement :

$$x \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ de dérivée } x \mapsto -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0).$$

Ainsi, $h : (x, y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , de dérivées partielles :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Enfin, la fonction $\ell : x \mapsto \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) dt$ est la primitive qui s'annule en 0 de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ qui est de classe C^1 sur \mathbb{R} , donc elle est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , de dérivée $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$.

En définitive, $g = h - \ell$ est la différence de deux fonctions de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , donc :

$$g \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

De plus, d'après ce qui précède, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \ell}{\partial x}(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \ell}{\partial y}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Donc, on a bien :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

2) Posons $\varphi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$. Comme $(r, \theta) \mapsto r \cos \theta$ et $(r, \theta) \mapsto r \sin \theta$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$, on a :

- pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \mapsto \varphi(r, \theta)$ est continue, et donc intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$;
- pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \mapsto \varphi(r, \theta)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ avec :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) ;$$

- Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta)$ est continue sur I en tant que somme de telles fonctions ;
- Pour tout segment $[0, a] \subset \mathbb{R}_+$, $(x, y) \mapsto \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|$ et $(x, y) \mapsto \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|$ sont continues sur le compact $[-a, a] \times [-a, a]$ donc y admettent toutes deux un maximum, respectivement M_1 et M_2 ; alors, pour tout $(r, \theta) \in [0, a] \times [0, 2\pi]$, on a $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) \right| \leq M_1 |\cos \theta| + M_2 |\sin \theta|$ et $\theta \mapsto M_1 |\cos \theta| + M_2 |\sin \theta|$ est continue et intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$.

Ainsi :

$$\Phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) d\theta \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \Phi'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) d\theta.$$

On a alors, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \Phi'(r) &= \int_0^{2\pi} \left[\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\cos \theta \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right] d\theta \end{aligned}$$

Et, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Phi'(r) = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \left[-r \sin \theta \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right] d\theta = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta.$$

Soit :

$$\Phi'(r) = \frac{1}{r} [g(r \cos \theta, r \sin \theta)]_0^{2\pi} = \frac{1}{r} [g(r, 0) - g(r, 0)] = 0.$$

Ainsi, Φ' est nulle sur \mathbb{R}_+^* et, comme elle est continue sur \mathbb{R}_+ :

$$\boxed{\Phi' = 0}$$

3) L'application $\Phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$ est de dérivée nulle sur \mathbb{R}_+ , donc elle y est constante.

Supposons que f possède un extremum local en $(0,0)$. Quitte à changer f en $-f$ (qui vérifie les mêmes hypothèses), on peut supposer que c'est un minimum. Il existe alors un réel $R > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in B((0,0), R)$, on a $f(x, y) \geq f(0,0)$.

Soit $r \in [0, R[$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a $(r \cos \theta, r \sin \theta) \in B((0,0), R)$, donc $f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0,0) \geq 0$.

De plus, $\theta \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0,0)$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et :

$$\int_0^{2\pi} [f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0,0)] d\theta = \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta - \int_0^{2\pi} f(0,0) d\theta = \Phi(r) - \Phi(0) = 0.$$

Nous avons donc une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$: elle est nulle sur ce segment, soit pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(0,0)$.

Ceci étant vrai pour tout $r \in [0, R[$, on a finalement, $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(0,0)$ pour tout $(r, \theta) \in [0, R[\times [0, 2\pi]$, soit $f(x, y) = f(0,0)$ pour tout $(x, y) \in B((0,0), R)$, et donc :

$$\boxed{f \text{ est constante au voisinage de } (0,0).$$

Exercice 6

1) Soit f une éventuelle solution du système sur \mathbb{R}^2 .

Les dérivées partielles existent et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y \Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + g(y)$$

avec g dérivable sur \mathbb{R} .

Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + g'(y) = x - y \Rightarrow g'(y) = -y \Rightarrow g(y) = -\frac{1}{2}y^2 + k$$

avec k constante réelle.

Ainsi, si f est solution du système sur \mathbb{R}^2 , on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + k$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction polynômiale $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + k$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 avec pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - y.$$

Donc, f est solution du système sur \mathbb{R}^2 .

Finalement :

Les solutions du système sur \mathbb{R}^2 sont les fonctions $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2) Soit h une éventuelle solution de $(E) : x + y + (x - y)y' = 0$ sur \mathbb{R} . Posons :

$$\Phi(x) = f(x, h(x)).$$

Comme f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et h est dérivable sur \mathbb{R} , Φ est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + h'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) = x + h(x) + h'(x)[x - h(x)] = 0.$$

Ainsi, Φ est constante sur \mathbb{R} , ce qui implique que $x \mapsto h(x)^2 - 2xh(x) - x^2$ est constante sur \mathbb{R} . Il existe donc un réel c tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x)^2 - 2xh(x) - x^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad (h(x) - x)^2 = 2x^2 + c \quad \Leftrightarrow \quad |h(x) - x| = \sqrt{2x^2 + c}.$$

Comme h doit être définie sur \mathbb{R} , on doit avoir $c \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) - x = \pm \sqrt{2x^2 + c}.$$

Comme h est continue sur \mathbb{R} , $x \mapsto h(x) - x$ l'est aussi donc doit s'annuler pour changer de signe. Or :

- si $c > 0$, $x \mapsto \sqrt{2x^2 + c}$ ne s'annule jamais, donc $h : x \mapsto x + \sqrt{2x^2 + c}$ ou $h : x \mapsto x - \sqrt{2x^2 + c}$;
- si $c = 0$, on a $x \mapsto \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}|x|$ ne s'annule qu'en 0, et comme h doit être dérivable sur \mathbb{R} , en particulier en 0, on a encore $h : x \mapsto (1 + \sqrt{2})x$ ou $h : x \mapsto (1 - \sqrt{2})x$.

Réciproquement, on vérifie que pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x + \sqrt{2x^2 + c}$, $x \mapsto x - \sqrt{2x^2 + c}$, $x \mapsto (1 + \sqrt{2})x$ et $x \mapsto (1 - \sqrt{2})x$ sont bien solutions de (E) sur \mathbb{R} et ainsi :

Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions :

$x \mapsto x + \sqrt{2x^2 + c}$, $x \mapsto x - \sqrt{2x^2 + c}$, $x \mapsto (1 + \sqrt{2})x$ et $x \mapsto (1 - \sqrt{2})x$
avec $c \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 7

1) Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p \in \mathbb{N}$ tels que les i_k sont distincts deux à deux et les j_k aussi, et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k f_{i_k, j_k} = 0.$$

On a donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\sum_{k=1}^p \lambda_k x^{i_k} y^{j_k} = 0$. En particulier, pour $y = 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^p \lambda_k x^{i_k} = 0$.

La fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^p \lambda_k x^{i_k}$ est alors une fonction polynomiale nulle, donc tous ses coefficients sont nuls, soit :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Ainsi :

La famille $(f_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est libre.

2) Les applications Δ et Φ sont linéaires par linéarité de la dérivation.

De plus, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Delta(f_{i,j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq 1 \text{ et } j \leq 1 \\ i(i-1)f_{i-2,j} & \text{si } i \geq 2 \text{ ou } j \leq 1 \\ j(j-1)f_{i,j-2} & \text{si } i \leq 1 \text{ ou } j \geq 2 \\ i(i-1)f_{i-2,j} + j(j-1)f_{i,j-2} & \text{si } i \geq 2 \text{ ou } j \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta(f_{i,j}) \in F.$$

Et :

$$\Phi(f_{i,j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \text{ ou } j = 0 \\ i(i-1)f_{i-1,j-1} & \text{si } i \geq 1 \text{ ou } j \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \Phi(f_{i,j}) \in F.$$

Donc, F est stable par Δ et Φ .

Ainsi :

Δ et Φ induisent des endomorphismes de F .

3) On a :

$$\ker \Phi|_F = \{f \in F \mid \Phi(f) = 0\} = \left\{ f \in F \mid \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \right\}.$$

Or :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(y) \Rightarrow f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Et, avec $f \in F$, on obtient $f(x) = P(x) + Q(y)$ avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, donc :

$$\ker \Phi|_F = \{P + Q \mid P, Q \in \mathbb{R}[x]\}$$

Soit $f \in F$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_{i,j})_{0 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{(N+1)^2}$ tels que $f = \sum_{0 \leq i, j \leq N} \lambda_{i,j} f_{i,j}$.

On peut alors écrire pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \lambda_{0,0} + \sum_{i=1}^N \lambda_{i,0} f_{i,0}(x, y) + \sum_{j=1}^N \lambda_{0,j} f_{0,j}(x, y) + \sum_{1 \leq i, j \leq N} \lambda_{i,j} f_{i,j}(x, y) \\ &= \lambda_{0,0} + \sum_{i=1}^N \lambda_{i,0} x^i + \sum_{j=1}^N \lambda_{0,j} y^j + xy \sum_{0 \leq i, j \leq N-1} \lambda_{i+1, j+1} x^i y^j \end{aligned}$$

En posant $h(x, y) = \sum_{i=0}^N \lambda_{i,0} x^i + \sum_{j=0}^N \lambda_{0,j} y^j$ et $g(x, y) = xy \sum_{0 \leq i, j \leq N-1} \lambda_{i+1, j+1} x^i y^j$, on a :

$$f = h + g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} h \in \ker \Phi|_F \\ g \in G \end{cases}.$$

Donc :

$$\underline{F = \ker \Phi|_F + G}.$$

Soit $f \in (\ker \Phi|_F) \cap G$. On a alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = xy g(x, y) = P(x) + Q(y)$$

avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $g \in F$.

En particulier :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = 0 = P(x) + Q(0)$ (avec $y = 0$), donc P est constant ;
- pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(0, y) = 0 = P(0) + Q(y)$ (avec $x = 0$), donc Q est constant.

Ainsi, f est constante et s'annule, donc $f = 0$ et :

$$\underline{(\ker \Phi|_F) \cap G = \{0\}}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{F = \ker \Phi|_F \oplus G}$$

Exercice 8

La fonction H est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en tant que fonction rationnelle. Le problème se pose en $(0, 0)$.

En posant $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}$ (coordonnées polaires), on a :

$$H(r \cos t, r \sin t) = \frac{r^2 \cos t \sin t (r^2 \cos^2 t - r^2 \sin^2 t)}{r^2} = r^2 \cos t \sin t (\cos^2 t - \sin^2 t) = r^2 \cos t \sin t \cos(2t).$$

Donc, $|H(r \cos t, r \sin t)| \leq r^2$, soit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$|H(x, y)| \leq x^2 + y^2.$$

Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$, le théorème de gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} H(x, y) = 0 = H(0, 0).$$

Donc, H est continue sur \mathbb{R}^2 .

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

En passant en coordonnées polaires comme plus haut, on obtient :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) = r \sin t (\cos^4 t + 4 \cos^2 t \sin^2 t - \sin^4 t).$$

Et :

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) \right| \leq r |\sin t| (\cos^4 t + 4 \cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t) \leq 6r.$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right| \leq 6(x^2 + y^2).$$

Et, comme plus haut, le théorème de gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Donc, $\frac{\partial H}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$, donc sur \mathbb{R}^2 .

En remarquant que $H(y, x) = -H(x, y)$, $\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x}(y, x)$, donc $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial H}{\partial x}$ est, elle aussi, continue en $(0, 0)$, donc sur \mathbb{R}^2 .

Finalement :

La fonction H est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, y) = \frac{4xy^3(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, 0) = 0$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, x) = 1$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, 0) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, x).$$

Ainsi, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ n'admet pas de limite quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, donc :

La fonction H n'est pas de classe C^2 en 0 , donc sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 9

1) Quitte à changer f en $-f$ (qui vérifie les mêmes hypothèses), supposons que f admette un minimum local en $x_0 \in U$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset U$ (car U est ouvert) et pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, $f(x_0) \leq f(x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[&\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) = f'(x_0) \leq 0 \\ x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[&\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) = f'(x_0) \geq 0 \end{aligned}$$

Finalement, on a $f'(x_0) \leq 0$ et $f'(x_0) \geq 0$, donc :

$$f'(x_0) = 0$$

Remarquons que cette question est une question de cours de première année.

2) Cette question est une question de cours de deuxième année : le consulter pour la preuve.

Si $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ est de classe C^1 sur U , un ouvert de \mathbb{R}^2 , et admet un extremum local en (a, b) , alors (a, b) est un point critique, autrement dit $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

3) Rappelons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(iy) &= \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \operatorname{ch} y \\ \sin(iy) &= \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = -\frac{1}{i} \frac{e^y - e^{-y}}{2} = i \operatorname{sh} y \end{aligned}$$

Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= |\sin(x + iy)|^2 = |\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)|^2 = |\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y|^2 \\ &= \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y = \sin^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y) + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y = \sin^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 x) \operatorname{sh}^2 y \end{aligned}$$

Soit :

$$f(x, y) = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$$

La fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 en tant que somme de telles fonctions.

Cherchons les points critiques sur l'ouvert $U = \overset{\circ}{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$ en remarquant que si $(x, y) \in U$, alors $x^2 < x^2 + y^2 < 1$, donc $x \in]-1, 1[\subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \cos x \sin x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \text{ ou } \sin x = 0 \\ \operatorname{sh} y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ car } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ y = 0 \end{cases}$$

Donc, le seul point critique est $(0, 0)$ et, d'après la question précédente, si f admet un extremum sur l'ouvert U , c'est en ce point. Or, $f(0, 0) = 0$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq 0$, donc 0 est un minimum global sur \mathbb{R}^2 donc sur Ω . De plus, il n'y a pas d'autre extremum sur U .

Cherchons un éventuel extremum local sur la frontière de Ω , soit le cercle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

Remarquons que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(-x, -y) = f(x, -y) = f(-x, y) = f(x, y).$$

Donc si f admet un extremum local sur C , alors il est atteint plusieurs fois dont une fois sur le quart de cercle $C' = \{(x, y) \in [0, 1]^2, x^2 + y^2 = 1\}$. Pour tout $(x, y) \in C'$, on a $x^2 + y^2 = 1$ et $y \geq 0$, donc $y = \sqrt{1 - x^2}$ et :

$$f(x, y) = g(x) = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2(\sqrt{1 - x^2}).$$

La fonction g est définie et continue sur $]0,1[$ et dérivable sur $]0,1[$ avec :

$$g'(x) = 2 \cos x \sin x + 2 \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{ch}(\sqrt{1-x^2}) \operatorname{sh}(\sqrt{1-x^2}) = \sin(2x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{sh}(2\sqrt{1-x^2}).$$

Et pour tout $x \in]0,1[$:

$$g'(x) = 2x \left(\frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{1-x^2})}{2\sqrt{1-x^2}} \right) = 2x \left(\varphi(2x) - \psi(2\sqrt{1-x^2}) \right).$$

avec $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ et $\psi(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}$.

Quand x décrit $]0,1[$, $2x$ et $2\sqrt{1-x^2}$ décrivent $]0,2[$. Les fonctions φ et ψ sont dérivables sur $]0,2[$ avec, pour tout $t \in]0,2[$:

$$\varphi'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} \quad \text{et} \quad \psi'(t) = \frac{t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t}{t^2}.$$

Les fonctions $t \mapsto t \cos t - \sin t$ et $t \mapsto t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t$ sont dérivables sur $]0,2[$, de dérivées $t \mapsto -t \sin t$, strictement négative sur $]0,2[$ et $t \mapsto t \operatorname{sh} t$, strictement positive sur $]0,2[$. Donc :

- $t \mapsto t \cos t - \sin t$ est strictement décroissante sur $]0,2[$ et vaut 0 en 0, donc $t \cos t - \sin t < 0$ sur $]0,2[$ et ainsi, $\varphi'(t) < 0$ sur $]0,2[$, donc φ est strictement décroissante sur $]0,2[$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 1$.

Ceci prouve que pour tout $t \in]0,2[$, $\varphi(t) < 1$, donc pour tout $x \in]0,1[$, $\varphi(2x) < 1$.

- $t \mapsto t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t$ est strictement croissante sur $]0,2[$ et vaut 0 en 0, donc $t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t > 0$ sur $]0,2[$ et ainsi, $\psi'(t) > 0$ sur $]0,2[$, donc ψ est strictement croissante sur $]0,2[$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 1$.

Ceci prouve que pour tout $t \in]0,2[$, $\psi(t) > 1$, donc pour tout $x \in]0,1[$, $\psi(2\sqrt{1-x^2}) > 1$.

Finalement, pour tout $x \in]0,1[$, $\varphi(2x) < 1 < \psi(2\sqrt{1-x^2})$, donc $g'(x) < 0$ et g est strictement décroissante sur $]0,1[$, donc sur $[0,1]$ par continuité.

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $g(1) \leq g(x) \leq g(0)$, soit :

$$0 < f(1,0) = \sin^2 1 \leq f(x, \sqrt{1-x^2}) \leq f(0,1) = \operatorname{sh}^2 1.$$

Remarquons enfin que pour tout $(x, y) \in \Omega \cap [0,1]^2$, on a $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, donc :

$$f(x, y) \leq f(x, \sqrt{1-x^2}) \leq f(0,1) = \operatorname{sh}^2 1$$

Par symétries, on obtient finalement $f(x, y) \leq f(0,1) = \operatorname{sh}^2 1$ pour tout $(x, y) \in \Omega$, donc sur Ω , f admet $\operatorname{sh}^2 1$ pour maximum global atteint en $(0,1)$ et $(0,-1)$.

Remarquons enfin que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x,0) = \sin^2 x \leq \sin^2 1 = f(1,0)$, donc $\sin^2 1 = f(1,0)$ n'est pas un minimum local.

Finalement :

Sur Ω , f admet un minimum global 0, atteint en $(0,0)$ et un maximum global $\operatorname{sh}^2 1$, atteint en $(0,1)$ et $(0,-1)$.

Exercice 10

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(tx, ty, tz)$.

Comme f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 , g est de classe C^1 sur \mathbb{R} et avec la règle de la chaîne, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d(tx)}{dt} \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty, tz) + \frac{d(ty)}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty, tz) + \frac{d(tz)}{dt} \frac{\partial f}{\partial z}(tx, ty, tz) \\ &= x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty, tz) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty, tz) + z \frac{\partial f}{\partial z}(tx, ty, tz) \end{aligned}$$

Donc, $g'(1) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$.

On veut prouver que :

(f est α -positivement homogène)

$$\Leftrightarrow \left(\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \alpha f(x, y, z) \right)$$

(\Rightarrow) On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x, y, z)$.

Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ fixé. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $g(\lambda) = f(\lambda u, \lambda v, \lambda w) = \lambda^\alpha f(u, v, w)$, donc :

$$g'(\lambda) = u \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda u, \lambda v, \lambda w) + v \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda u, \lambda v, \lambda w) + w \frac{\partial f}{\partial z}(\lambda u, \lambda v, \lambda w) = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(u, v, w).$$

En multipliant par λ , on obtient :

$$\lambda u \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda u, \lambda v, \lambda w) + \lambda v \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda u, \lambda v, \lambda w) + \lambda w \frac{\partial f}{\partial z}(\lambda u, \lambda v, \lambda w) = \alpha \lambda^\alpha f(u, v, w) = \alpha f(\lambda u, \lambda v, \lambda w).$$

Ceci est vrai pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, donc en posant $(\lambda u, \lambda v, \lambda w) = (x, y, z)$, on obtient pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \alpha f(x, y, z).$$

(\Leftarrow) On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \alpha f(x, y, z).$$

Alors, à $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fixé, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$tx \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty, tz) + ty \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty, tz) + tz \frac{\partial f}{\partial z}(tx, ty, tz) = t g'(t) = \alpha f(tx, ty, tz) = \alpha g(t).$$

Ainsi, g est solution de l'équation différentielle $ty' - \alpha y = 0$, qui se réécrit sur \mathbb{R}_+^* , $y' - \frac{\alpha}{t}y = 0$.

Cette équation est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, et ses solutions sur \mathbb{R}_+^* sont les fonctions $t \mapsto K \exp\left(\int^t \frac{\alpha}{u} du\right) = K t^\alpha$ avec K constante réelle.

Ainsi, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $g(\lambda) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = K \lambda^\alpha$.

En évaluant en $\lambda = 1$, on obtient $g(1) = f(x, y, z) = K$ et donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(\lambda) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x, y, z).$$

Finalement, on a établi que pour f de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 :

(f est α -positivement homogène)

$$\Leftrightarrow \left(\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \alpha f(x, y, z) \right)$$