Exercices d'entrainement - Corrigés des chapitres 1 à 8

Chapitre 1

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\arctan(n+\alpha)-\arctan n}{(n+\alpha)-n} = \arctan' c_n = \dfrac{1}{1+c_n^2}$ avec $n \leq c_n \leq n+\alpha$, donc :

$$0 \leq \arctan(n+\alpha)-\arctan n \leq \frac{\alpha}{n^2}.$$

Et $\sum\left(\arctan(n+\alpha)-\arctan n\right)$ converge par comparaison à $\sum \dfrac{\alpha}{n^2}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+\cos n} = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\dfrac{\cos n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{\cos n}{n}+o\left(\frac{\cos n}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ convergent donc $\sum u_n$.

3) Pour tout entier $k \geq 2$, $\sqrt[k]{3} = e^{\frac{\ln 3}{k}} \leq e^{\frac{\ln 3}{2}} = \sqrt{3} < 2$, donc $u_n > 0$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$\ln u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(2-\sqrt[k]{3}\right).$$

Or, $\ln\left(2-\sqrt[k]{3}\right) = \ln\left(2-e^{\frac{\ln 3}{k}}\right) = \ln\left[2-\left(1+\dfrac{\ln 3}{k}+o\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)\right] = \ln\left[1-\dfrac{\ln 3}{k}+o\left(\dfrac{1}{k}\right)\right]$, donc $\ln\left(2-\sqrt[k]{3}\right) \sim -\dfrac{\ln 3}{k}$.

Comme $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\ln 3\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}\right) = -\infty$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^{3n+1}dx = \dfrac{1}{3n+2}$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{3n+2} &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^{3n+1}dx = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3n+1}\right)dx = \int_0^1\left(x\sum_{n=0}^{N}(-x^3)^n\right)dx = \int_0^1\left(x\frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1-(-x^3)}\right)dx \\ &= \int_0^1\frac{x}{1+x^3}dx + (-1)^N\int_0^1\frac{x^{3N+4}}{1+x^3}dx\end{aligned}.$$

Et $0 \leq \int_0^1 \dfrac{x^{3N+4}}{1+x^3}dx \leq \int_0^1 x^{3N+4}dx = \dfrac{1}{3N+5}$, donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_0^1\dfrac{x^{3N+4}}{1+x^3}dx = 0$. Alors, $\sum\dfrac{(-1)^n}{3n+2}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2} = \int_0^1\frac{x}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\frac{3}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{\pi-\ln 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.$$

Chapitre 2

1) L'application N est définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Remarquons que $N((x,y)) = N_1((x, x+2y))$ où $N_1((x,y)) = |x| + |y|$.

Soient (x,y), (x',y') de $\mathbb{R}^2$ et λ de $\mathbb{R}$.

- $N(\lambda(x,y)) = N((\lambda x, \lambda y)) = |\lambda x| + |\lambda x + 2\lambda y| = |\lambda||x| + |\lambda||x+2y| = |\lambda|(|x| + |x+2y|) = |\lambda| N((x,y))$.

  Donc, N est homogène.
- $N((x,y)) = 0 \Leftrightarrow N_1((x, x+2y)) = 0 \Leftrightarrow (x, x+2y) = (0,0) \Leftrightarrow x = x+2y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

  Donc, N est séparée.
- $$N((x,y)+(x',y')) = N((x+x', y+y')) = |x+x'| + |x+x'+2(y+y')| = |x+x'| + |x+2y+x'+2y'|$$
  $$\leq |x| + |x'| + |x+2y| + |x'+2y'| = |x| + |x+2y| + |x'| + |x'+2y'| = N((x,y)) + N((x',y'))$$

  Donc, N vérifie l'inégalité triangulaire.

Finalement, N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

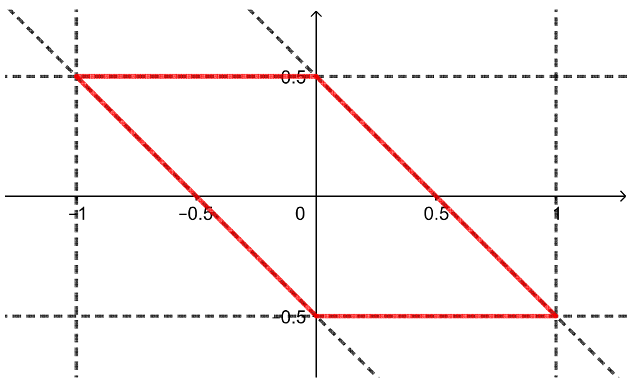
On a $S((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, N((x,y)) = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |x+2y| = 1\}$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|x| + |x+2y| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2y \geq 0 \\ x+x+2y = 1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2y \leq 0 \\ x-x-2y = 1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x \leq 0 \\ x+2y \geq 0 \\ -x+x+2y = 1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x \leq 0 \\ x+2y \leq 0 \\ -x-x-2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -\frac{1}{2}x \\ x+y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq -\frac{1}{2}x \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq -\frac{1}{2}x \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq -\frac{1}{2}x \\ x+y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = \frac{1}{2} - x \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ y = -\frac{1}{2} - x \end{cases}$$

On obtient la partie rouge du plan :



2) a. L'application N est définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Remarquons que $N(f) = |f(0)| + N_\infty(f')$.

Soient f et g de E, et λ de $\mathbb{R}$.

- $N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |\lambda f'(t)| = |\lambda| \left(|f(0)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| \right) = |\lambda| N(f)$.

  Donc, N est homogène.

- $N(f) = 0 \iff |f(0)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| = 0 \iff |f(0)| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| = 0$

  $$\iff \begin{cases} f(0) = 0 \\ f' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(0) = 0 \\ f = cste \end{cases} \iff f = 0$$

  Donc, N est séparée.

- $N(f+g) = |f(0)+g(0)| + N_\infty(f'+g') \le |f(0)| + |g(0)| + N_\infty(f') + N_\infty(g') = N(f) + N(g)$.

  Donc, N vérifie l'inégalité triangulaire.

Finalement, N est une norme sur E.

b. Soit $f \in \overline{B}_N(0,1)$. On a alors $N(f) = |f(0)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| \le 1$.

Posons $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| = a$ donc pour tout $t \in [0,1]$, $|f'(t)| \le a$ et, par croissance de l'intégrale :

$$\left| \int_0^t f'(u)\,du \right| \le \int_0^t |f'(u)|\,du \le \int_0^t a\,du \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(0)| \le at .$$

Alors, avec $|f(t)| = |f(t)| - |f(0)| + |f(0)|$, on a pour tout $t \in [0,1]$:

$$|f(t)| \le \big||f(t)| - |f(0)|\big| + |f(0)| \le |f(t) - f(0)| + |f(0)| \le at + |f(0)| \le a + |f(0)| = N(f) \le 1 .$$

Donc $N_\infty(f) \le 1$ et $f \in \overline{B}_{N_\infty}(0,1)$. Finalement, on a bien :

$$\underline{\overline{B}_N(0,1) \subset \overline{B}_{N_\infty}(0,1)} .$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : t \mapsto t^n$ appartient à E et :

- $N_\infty(f) = 1$ donc $f \in \overline{B}_{N_\infty}(0,1)$;
- $N(f) = n$ donc quand $n \ge 2$, $f \notin \overline{B}_{N_\infty}(0,1)$.

Ainsi, l'inclusion réciproque est fausse.

c. Il suffit de considérer $f : t \mapsto t$. On a $N(f) = N_\infty(f) = 1$ donc $f \in \overline{B}_N(0,1)$ et $N_\infty(f) = 1$.

3) a. L'application N est définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Remarquons que $N(f) = N_1(f_1)$ où $f_1 : t \mapsto (1+t^2) f(t)$ et $N_1(f_1) = \int_0^1 |f_1(t)|\,dt$.

Soient f et g de E, et λ de $\mathbb{R}$.

- $N(\lambda f) = \int_0^1 (1+t^2) |\lambda f(t)|\,dt = \int_0^1 (1+t^2) |\lambda| |f(t)|\,dt = |\lambda| N(f)$.

  Donc, N est homogène.

- $N(f)=0 \quad \Leftrightarrow \quad N_1(f_1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f_1=0 \quad \Leftrightarrow \quad f=0$ (car $f_1=hf$ où $h:t\mapsto 1+t^2$ ne s'annule pas).

  Donc, N est séparée.
- $N(f+g)=N_1(f_1+g_1)\leq N_1(f_1)+N_1(g_1)=N(f)+N(g)$.

  Donc, N vérifie l'inégalité triangulaire.

Finalement, N est une norme sur E.

b. Soit $f\in E$. Pour tout $t\in[0,1]$, $|f(t)|\leq\|f\|_\infty$, donc :

$$N(f)=\int_0^1(1+t^2)|f(t)|dt\leq\int_0^1(1+t^2)\|f\|_\infty\,dt=\frac{4}{3}\|f\|_\infty.$$

De plus, pour $f:t\mapsto 1$, qui appartient à E, on a $N(f)=\int_0^1(1+t^2)dt=\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\|f\|_\infty$ (avec $\|f\|_\infty=1$), donc :

$$\underline{\beta=\frac{4}{3}.}$$

c. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n:t\mapsto t^n$ appartient à E, $\|f_n\|_\infty=1$ et :

$$N(f_n)=\int_0^1(1+t^2)t^n dt=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}.$$

On a $\dfrac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, donc la quantité $\dfrac{N(f)}{\|f\|_\infty}$ n'est pas minorée par un réel $\alpha>0$ quand f décrit $E\setminus\{0\}$.
Autrement dit, il n'existe pas de réel α strictement positif tel que pour toute $f\in E$, $\alpha\|f\|_\infty\leq N(f)$.

4) Notons pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A_k=(a_{i,j}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n}$, $A_k^{-1}=(b_{i,j}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n}$, $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

Comme $A_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}A$ et $A_k^{-1}\xrightarrow[k\to+\infty]{}B$, on a $a_{i,j}^{(k)}\xrightarrow[k\to+\infty]{}a_{i,j}$ et $b_{i,j}^{(k)}\xrightarrow[k\to+\infty]{}b_{i,j}$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$.

De plus pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A_kA_k^{-1}=\left(\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}^{(k)}b_{\ell,j}^{(k)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et $\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}^{(k)}b_{\ell,j}^{(k)}\xrightarrow[k\to+\infty]{}\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}b_{\ell,j}$, donc :

$$A_kA_k^{-1}\xrightarrow[k\to+\infty]{}AB.$$

Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A_kA_k^{-1}=I_n$, donc $A_kA_k^{-1}\xrightarrow[k\to+\infty]{}I_n$ et ainsi $AB=I_n$, autrement dit :

$$\underline{A\text{ est inversible et }A^{-1}=B.}$$

Chapitre 3

1) a. On a $f(a)=0$ et pour tout $x\in E$, $f(x)\leq \|x-a\|$, donc

$$\left|f(x)-f(a)\right|=f(x)\leq \|x-a\|.$$

Comme $\lim\limits_{x\to a}\|x-a\|=0$, on obtient par comparaison, $\lim\limits_{x\to a}\left|f(x)-f(a)\right|=0$, soit $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, autrement dit :

$$\underline{f \text{ est continue en } a.}$$

b. On a $\|-a\|=\|a\|$, donc :

$$f(-a)=\|-a-a\|=2\|a\|.$$

Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{\lambda\to 1^+}(-\lambda a)=-a$ et si $\lambda>1$, on a $\|-\lambda a\|=\lambda\|a\|>\|a\|$, donc $f(-\lambda a)=0$ et :

$$\lim_{\lambda\to 1^+} f(-\lambda a)=0\neq 2\|a\|=f(-a).$$

Ceci prouve que :

$$\underline{f \text{ n'est pas continue en } -a.}$$

2) On note $f: x\mapsto \|x\|a$. Pour tous $x, y\in E$:

$$\|f(x)-f(y)\|=\big\|\|x\|a-\|y\|a\big\|=\big|\|x\|-\|y\|\big|\|a\|\leq \|a\|\|x-y\|.$$

Donc :

$$\underline{x\mapsto \|x\|a \text{ est } \|a\|\text{-lipschitzienne}.}$$

3) Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de P convergeant vers $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $M\mapsto M^2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue (les coefficients de M^2 sont polynomiaux en ceux de M), donc $M_k^2\xrightarrow[k\to+\infty]{}M^2$. Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $M_k^2=M_k$ car $M_k\in P$, donc $M_k^2=M_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}M$ et ainsi, $M^2=M$, donc $M\in P$. Ceci prouve que :

$$\underline{P \text{ est une partie fermée de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Pour tout $a\in\mathbb{R}$., $M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in P$ pour $n=2$ (pour $n>2$, on peut prendre $M_a=\left(\begin{array}{c|c}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix} & 0_{2,n-2}\\ \hline 0_{n-2,2} & I_{n-2}\end{array}\right)$).

Or, $\|M_a\|_\infty=a$ quand $a\geq 1$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty}\|M_a\|_\infty=+\infty$, ce qui prouve que :

$$\underline{P \text{ n'est une pas partie bornée de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

4) a. Remarquons déjà que $x^2-2xy+3y^2=(x-y)^2+2y^2=0$ si et seulement si $x-y=y=0$, donc si et seulement si $(x,y)\neq(0,0)$. La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme quotient de fonction polynomiales.

Soit $D: y=ax$ une droite non verticale passant par l'origine. On a alors pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x,ax)=\frac{ax}{x^2-2ax+3a^2}\xrightarrow[x\to 0]{}0=f(0,0).$$

Ainsi, la restriction de *f* à *D* est continue.

Remarquons que cela fonctionne si $a=0$, car dans ce cas $f(x,ax)=f(x,0)=0$.

La seule droite verticale passant par l'origine est l'axe des ordonnées (*Oy*), d'équation $x=0$ et, pour tout $y\in\mathbb{R}^*$:

$$f(0,y)=0\xrightarrow[y\to 0]{}0=f(0,0).$$

Donc, la restriction de *f* à (*Oy*) est continue.

Finalement, la restriction de *f* à toute droite passant par l'origine est continue.

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x,x^2)=\frac{1}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}\neq f(0,0).$$

Donc, *f* n'est pas continue à l'origine.

Chapitre 4

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, g_n est dérivable sur $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ en tant que produit de telles fonctions et :

$$g_n'(x)=\cos x\cos^n x-n\sin^2 x\cos^{n-1}x=(n+1)\left[\frac{1}{n+1}-\sin^2 x\right]\cos^{n-1}x.$$

En posant $\alpha_n=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$, on a $g_n(\alpha_n)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n$ et on obtient le tableau :

x	0	α_n	$\frac{\pi}{2}$
g_n	0 $\nearrow$	$g_n(\alpha_n)$	$\searrow$ 0

Soit $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. On a $\cos x\in[0,1[$, donc $f_n(x)=x\sin x\cos^n x\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $f_n(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle.

D'après le tableau ci-dessus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$|f_n(x)|=|xg_n(x)|\leq\frac{\pi}{2}g_n(\alpha_n).$$

Donc $\sup\limits_I|f_n|\leq\frac{\pi}{2}g_n(\alpha_n)$ et :

$$g_n(\alpha_n)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}e^{-\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-\frac{1}{2}}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_I|f_n|=0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers la fonction nulle.}}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(0)=0$ et pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos x\neq1$, et :

$$\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=\sum_{k=1}^{n}x\sin x\cos^k x=x\sin x\cos x\frac{1-\cos^n x}{1-\cos x}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{x\sin x\cos x}{1-\cos x}.$$

Ainsi, la série $\sum f_n$ converge simplement sur *I* vers la fonction $f:x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x\sin x\cos x}{1-\cos x} & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

Enfin, $x\sin x\cos x\underset{x\to0}{\sim}x^2$ et $1-\cos x\underset{x\to0}{\sim}\frac{x^2}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{1}{2}\neq0=f(0)$. Ceci prouve que f n'est pas continue en 0, donc que la convergence de $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur *I*, et donc pas normale non plus.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $f_n(x)=\dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

On a $|f_n(x)|<\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$, et ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

De surcroit, comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f_n(x)|<\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f_n'(x)=\dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

La série $\sum f_n'(0)$ (qui est la série harmonique) diverge.

Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $x\in\left]-\infty,-a\right]\cup\left[a,+\infty\right[$, $|f_n'(x)|\leq\dfrac{1}{n^3a^2}$ et la série $\sum\dfrac{1}{n^3}$ converge, donc $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $\left]-\infty,-a\right]\cup\left[a,+\infty\right[$. Ceci permet de conclure que $f=\sum\limits_{n\geq1}f_n$ est de classe C^1 sur $\left]-\infty,-a\right]\cup\left[a,+\infty\right[$. Ceci étant vrai pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$$

On a $f(0)=0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{f(x)}{x}=\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{f_n(x)}{x}=\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n}h(nx)$ avec $h(t)=\dfrac{\arctan t}{t}$.

On a $\lim\limits_{0}h=1$, donc il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $t\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}$, $h(t)\geq\dfrac{1}{2}$.

Or, $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}=+\infty$, donc pour tout réel $A>0$, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}\geq 2A$.

Remarquons que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $h(x)>0$, donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\geq\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}h(nx)$.

Alors, pour tout $x\in\left[-\dfrac{\alpha}{N},\dfrac{\alpha}{N}\right]\setminus\{0\}$, on a $nx\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}$ pour tout $n\in[\![1,N]\!]$ et :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}\geq\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}h(nx)\geq\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\frac{1}{2}\geq A.$$

Finalement, pour tout réel $A>0$, il existe $a=\dfrac{\alpha}{N}>0$ tel que $x\in[-a,a]\setminus\{0\}$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\geq A$. Ceci prouve que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=+\infty$ et donc que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas dérivable en 0.}}$$

3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ est définie sur $I = \left]-1, +\infty\right[$ et pour tout $x \in I$:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

Donc, $f_n(0) = 0$ et pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$. Dans les deux cas, la série $\sum f_n(x)$ converge et ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est définie sur } I.}$$

b. Pour tout $x \in I$ et pour tout entier $n \geq 2$, on a $n + x > n - 1 > 0$ et :

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{n|n+x|} \leq \frac{|x|}{n(n-1)}.$$

Soit $[a,b] \subset I$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a $|x| \leq \mu = \max(|a|,|b|)$, donc $|f_n(x)| \leq \frac{\mu}{n(n-1)}$.

Comme la série $\sum \frac{\mu}{n(n-1)}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$ et comme les f_n sont toutes continues sur *I*, la fonction *S* est continue sur $[a,b]$. Ainsi, *S* est continue sur tout segment inclus dans *I*.

Enfin, comme $\bigcup_{[a,b] \subset I} [a,b] = I$:

$$\boxed{S \text{ est continue sur } I.}$$

c. Pour que $\sum f_n$ converge normalement sur *I*, il faut que $\|f_n\|_\infty$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Or, pour tout entier $n \geq 2$, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc :

$$\boxed{\text{La série } S \text{ ne converge pas normalement sur } I.}$$

d. Pour tout $x \in I$, $x + 1 \in I$ et :

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x}\right) = \frac{1}{x+1} \quad \text{(par télescopage)}$$

Comme *S* est continue sur *I*, elle l'est en 0, donc $\lim_{x \to -1^+} S(x+1) = \lim_{x \to 0} S(x) = S(0) = 0$.

Comme pour tout $x \in I$, $(x+1)S(x+1) - 1 = (x+1)S(x)$, on a $\lim_{x \to -1^+} (x+1)S(x) = \lim_{x \to -1^+} (x+1)S(x+1) - 1 = -1$ et donc :

$$\boxed{S(x) \underset{x \to -1^+}{\sim} -\frac{1}{x+1}}$$

4) a. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n \ln n} = \ln x \dfrac{(1/x)^n}{\ln n}$.

- $u_n(1) = 0$: $\sum u_n(1)$ converge ;
- si $0 < x < 1$, $\dfrac{1}{x} > 1$ donc $u_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ par croissances comparées : $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement ;
- si $x > 1$, on a $u_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\right)$ et $0 < \dfrac{1}{x} < 1$, donc $\sum \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ converge, donc : $\sum u_n(x)$ converge.

Finalement :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge simplement sur } D = [1, +\infty[\,.}$$

b. Pour tout entier $n \geq 2$, u_n est dérivable sur D en tant que quotient de telles fonctions et :

$$u_n'(x) = \frac{n}{x^{n+1} \ln n}\left(\frac{1}{n} - \ln x\right).$$

Donc, u_n est croissante sur $\left]1, e^{1/n}\right]$ et croissante sur $\left[e^{1/n}, +\infty\right[$. Comme u_n est positive sur D, on a :

$$\|u_n\|_\infty = u_n(e^{1/n}) = \frac{1}{e\, n \ln n}.$$

Or, $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln t}$ est continue, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$, et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t} = \left[\ln(\ln t)\right]_2^{+\infty}$ diverge, donc par comparaison série-intégrale $\sum \|u_n\|_\infty$ diverge et ainsi :

$$\boxed{\sum u_n \text{ ne converge pas normalement sur } D.}$$

c. Soit $x \in D$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \geq n+1$, on a : $0 \leq u_k(x) = \dfrac{\ln x}{x^k \ln k} \leq \dfrac{\ln x}{\ln(n+1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k$.

Donc, pour $x > 1$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln x}{\ln(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \frac{(1/x)^{n+1}}{1 - 1/x} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{\ln x}{x-1}\left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

Or, pour tout $x \in D$, $0 \leq \left(\dfrac{1}{x}\right)^n \leq 1$ et $0 \leq \ln x \leq x - 1$ (il suffit d'étudier $x \mapsto \ln x - x + 1$, qui est décroissante sur $D = [1, +\infty[$ et nulle en 1, donc négative sur D). Ainsi, $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ et comme $u_k(1) = 0$ pour tout k, l'inégalité reste vraie pour tout $x \in D$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}}$$

Comme $\dfrac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, l'inégalité ci-dessus prouve que $\sum u_n$ converge uniformément sur D et comme toutes les fonctions u_n sont continues sur D :

$$\boxed{\text{La fonction } \sum_{n \geq 2} u_n \text{ est continue sur } D.}$$

Chapitre 5

1) On a $\dfrac{n^2+4n-1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et le rayon de convergence de $\sum nx^n$ est 1, donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum \frac{n^2+4n-1}{n+2}x^n \text{ est 1.}}$$

Pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+4n-1}{n+2}x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(n+2-\frac{5}{n+2}\right)x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)\,x^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n - 5\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^n}{n+2} \text{ (les trois séries convergent).}$$

Et :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)\,x^n = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$x^2\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^n}{n+2} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^{n+2}}{n+2} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^{n+1}}{n+1} - x = -\ln(1-x) - x$$

Donc, pour tout $x\in \left]-1,1\right[$:

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+4n-1}{n+2}x^n = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{1-x}+5\dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2} & \text{quand } x\neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{quand } x=0 \end{cases}}$$

2) Posons $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et notons R le rayon de convergence de cette série.

La fonction f est de classe C^∞ sur $\left]-R,R\right[$ et pour tout $x\in\left]-R,R\right[$:

$$4xf''(x)+2f'(x)+f(x) = 4x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(2n+2)(2n+1)a_{n+1}+a_n\right]x^n$$

Donc, f est solution de (E) si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}}$$

Une récurrence simple permet alors de prouver que si $a_0\neq 0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\neq 0$ et si $a_0=0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=0$. Dans le premier cas, on a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\sum a_n x^n$ converge d'après la règle de d'Alembert. Ainsi :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ est infini et } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=-\dfrac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$ et en multipliant par $(2n+2)!$, on obtient $\big(2(n+1)\big)!a_{n+1}=-(2n)!a_n$.
La suite $\big((2n)!a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison – 1 et de premier terme a_0, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(2n)!a_n=a_0(-1)^n$, soit :

$$\boxed{a_n=\frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}}$$

Les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ de (E), sont alors les fonctions :

$$\boxed{x\mapsto\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}.}$$

On a $\cos t=\sum_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\sqrt{x}^{2n}=\cos\sqrt{x}$ et ainsi, les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}_+$ de (E), sont les fonctions :

$$\boxed{x\mapsto\lambda\cos\sqrt{x} \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}.}$$

La fonction $g:x\mapsto\sin\sqrt{x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$g':x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$$
$$g'':x\mapsto-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}-\frac{1}{4x}\sin\sqrt{x}$$

Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$4xg''(x)+2g'(x)+g(x)=4x\left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}-\frac{1}{4x}\sin\sqrt{x}\right)+2\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}=0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } x\mapsto\sin\sqrt{x} \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

3) Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_nx^{2n+1}}\right|=\frac{2(n+1)}{2n+3}x^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}x^2.$$

D'après la règle de d'Alembert, $\sum a_nx^{2n+1}$ converge quand $|x|<1$ et diverge quand $|x|>1$, donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1} \text{ est 1.}}$$

La fonction *f* est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et pour tout $x\in\,]-1,1[$, $f'(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n}$, donc :

$$\begin{aligned}(1-x^2)f'(x)-xf(x)&=(1-x^2)\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n}-x\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n+2}-\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+2}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\sum_{n\geq 0}(2n+2)\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2(n+1)}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\sum_{n\geq 1}2n\frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{(2n-1)!}x^{2n}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\sum_{n\geq 1}2n\frac{4^n(n!)^2}{4n^2(2n-1)!}x^{2n}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\sum_{n\geq 1}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}\\&=1\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ vérifie l'équation différentielle } (1-x^2)y'-xy=1.}$$

Sur $]-1,1[$, l'équation $(1-x^2)y'-xy=0$ se récrit $y'-\frac{x}{1-x^2}y=\frac{1}{1-x^2}$, qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x\mapsto \lambda\exp\left(\int_0^x\frac{t}{1-t^2}\,dt\right)=\frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Par la méthode de variation de la constante, on trouve $x\mapsto\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ comme solution particulière.

Alors, pour tout $x\in\,]-1,1[$, $f(x)=\frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $\lambda=f(0)=0$ et finalement, pour tout $x\in\,]-1,1[$:

$$\boxed{f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

4) Les fonctions $x\mapsto e^{x^2/2}$ et $x\mapsto e^{-x^2/2}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et paires, donc $x\mapsto\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire et ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f:x\mapsto e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et impaire.}}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{x^2/2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}$ et $e^{-x^2/2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n n!}$, puis, en intégrant terme à terme, on obtient :

$$\int_0^x e^{-t^2/2}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}.$$

Alors, *f* est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\right).$$

Les deux séries convergent absolument donc on peut utiliser le produit de Cauchy :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2n-2k}}{2^{n-k}(n-k)!}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\right)x^{2n+1}.$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{2k}dt = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t^2)^k\right)dt = \int_0^1(1-t^2)^n dt$$

$$\underset{t=\sin u}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 u)^n\cos u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}u\,du = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Donc, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n n!}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}}$$

Remarque : On pouvait remarquer que *f* est la solution qui s'annule en 0 de $y' - x\,y = 1$ et chercher les solutions impaires et développables en série entière de cette équation : on arrive au même résultat. Ceci pourrait être une méthode (un peu tordue !) pour calculer l'intégrale de Wallis $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}u\,du$.

Chapitre 6

1) Si $n=1$, $A=(\sin 1)$ et $rg(A)=1$. On suppose maintenant que $n\geq 2$.

Pour tous $i,j\in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j}=\sin(i+j)=\sin i\cos j+\cos i\sin j$.

Si on note $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A, on a pour tout $j\in [\![1,n]\!]$:

$$C_j=(\cos j)X+(\sin j)Y \text{ avec } X=\begin{pmatrix}\sin 1\\ \sin 2\\ \vdots\\ \sin n\end{pmatrix} \text{ et } Y=\begin{pmatrix}\cos 1\\ \cos 2\\ \vdots\\ \cos n\end{pmatrix}.$$

Donc, $\operatorname{Im} A=\operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_n)\subset \operatorname{Vect}(X,Y)$ et $rg(A)\leq 2$.

De plus, $C_1=\begin{pmatrix}\sin 2\\ \sin 3\\ \vdots\\ \sin(n+1)\end{pmatrix}$, $C_2=\begin{pmatrix}\sin 3\\ \sin 4\\ \vdots\\ \sin(n+2)\end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix}\sin 2 & \sin 3\\ \sin 3 & \sin 4\end{vmatrix}=\sin 2\sin 4-\sin^2 3\approx -0,71\neq 0$, donc C_1 et C_2 sont non colinéaires, donc $rg(A)\geq 2$ et finalement, $rg(A)=2$.

Ainsi :

$$\boxed{rg(A)=\begin{cases}1 \text{ quand } n=1\\ 2 \text{ quand } n\geq 2\end{cases}}$$

2) On a $E=\operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g=\ker f+\ker g$.

Comme E est de dimension finie, on peut utiliser la formule de Grassmann, qui donne :

$$\dim E=rg(f)+rg(g)-\dim(\operatorname{Im} f\cap \operatorname{Im} g) \qquad (1)$$
$$\dim E=\dim(\ker f)+\dim(\ker g)-\dim(\ker f\cap \ker g) \qquad (2)$$

En additionnant (1) et (2), on obtient :

$$2\dim E=rg(f)+rg(g)+\dim(\ker f)+\dim(\ker g)-\dim(\operatorname{Im} f\cap \operatorname{Im} g)-\dim(\ker f\cap \ker g)$$

Or, le théorème du rang donne aussi :

$$\dim E=rg(f)+\dim(\ker f)=rg(g)+\dim(\ker g).$$

Donc, $2\dim E=2\dim E-\dim(\operatorname{Im} f\cap \operatorname{Im} g)-\dim(\ker f\cap \ker g)$, soit :

$$\dim(\operatorname{Im} f\cap \operatorname{Im} g)+\dim(\ker f\cap \ker g)=0.$$

Enfin, comme $\dim(\operatorname{Im} f\cap \operatorname{Im} g)$ et $\dim(\ker f\cap \ker g)$ sont des entiers positifs, la relation ci-dessus donne :

$$\dim(\operatorname{Im} f\cap \operatorname{Im} g)=\dim(\ker f\cap \ker g)=0.$$

Alors, $\operatorname{Im} f\cap \operatorname{Im} g=\ker f\cap \ker g=\{0\}$ et donc :

$$\boxed{E=\operatorname{Im} f\oplus \operatorname{Im} g=\ker f\oplus \ker g}$$

3) Supposons qu'il existe une matrice B telle que $B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

On a $B^4=(B^2)^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $B^8=(B^4)^2=0_3$.

Or, $\operatorname{Im} B^2=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\subset \operatorname{Im} B$, donc $rg\,(B^2)=2\leq rg\,(B)$ et comme B est nilpotente, elle n'est pas inversible donc $rg\,(B)\leq 2$, finalement $rg\,(B)=rg\,(B^2)=2$ et donc $\operatorname{Im} B^2=\operatorname{Im} B$.

Alors, si u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à B, on a $\operatorname{Im} u^2=\operatorname{Im} u$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\operatorname{Im} B^{k+1}=\operatorname{Im} u^{k+1}=u^{k+1}(\mathbb{R}^3)=u^{k-1}\left(u^2(\mathbb{R}^3)\right)=u^{k-1}\left(\operatorname{Im} u^2\right)=u^{k-1}\left(\operatorname{Im} u\right)=u^k(\mathbb{R}^3)=\operatorname{Im} u^k=\operatorname{Im} B^k.$$

La suite $\left(\operatorname{Im} B^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc constante, soit pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\operatorname{Im} B^k=\operatorname{Im} B$.

En particulier, $\operatorname{Im} B^8=\operatorname{Im} B$. Ceci est absurde car $B^8=0_3$ et $B\neq 0_3$, et ainsi :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice } B \text{ telle que } B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.}$$

4) a. On a toujours $\ker f\subset \ker g\circ f$.

Soit $x\in\ker g\circ f$. On a $g\circ f(x)=0$ et comme $f\circ g=id_E$:

$$f(x)=(f\circ g)\big(f(x)\big)=(f\circ g\circ f)(x)=f\big((g\circ f)(x)\big)=f(0)=0.$$

Donc $x\in\ker f$ et ainsi, $\ker g\circ f\subset\ker f$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\ker g\circ f=\ker f}$$

b. On a toujours $\operatorname{Im} g\circ f\subset\operatorname{Im} g$.

Soit $x\in\operatorname{Im} g$. Il existe $z\in E$ tel que $x=g(z)$ et comme $f\circ g=id_E$:

$$x=g\big((f\circ g)(z)\big)=(g\circ f\circ g)(z)=(g\circ f)\big(g(z)\big).$$

Donc $x\in\operatorname{Im} g\circ f$ et ainsi, $\operatorname{Im} g\subset\operatorname{Im} g\circ f$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\operatorname{Im} g\circ f=\operatorname{Im} g}$$

c. On veut $E=\ker f\oplus\operatorname{Im} g$.

Procédons par analyse-synthèse. Soit $x\in E$.

Analyse : Supposons qu'il existe $(x_1, z) \in \ker f \times E$ tel que $x = x_1 + g(z)$.

Alors, avec $f\left(g(z)\right) = (f \circ g)(z) = z$ $f(x_1) = 0$, on a :

$$f(x) = f(x_1) + f\left(g(z)\right) = z$$
$$x_1 = x - g(z) = x - (g \circ f)(x)$$

Ainsi, si x se décompose dans $\ker f + \operatorname{Im} g$, la décomposition est unique est la somme est directe.

Synthèse : Posons $z = f(x)$ et $x_1 = x - (g \circ f)(x)$. On a :

$$x_1 + g(z) = x_1 = x - (g \circ f)(x) + g\left(f(x)\right) = x.$$

Et $f(x_1) = f(x) - f\left((g \circ f)(x)\right) = f(x) - (f \circ g)\left(f(x)\right) = f(x) - f(x) = 0$, donc $x_1 \in \ker f$ et, comme bien entendu $g(z) \in \operatorname{Im} g$, on a $x \in \ker f + \operatorname{Im} g = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g}$$

d. Il est clair que si E est de dimension finie, alors $f \circ g = id_E$, implique que f et g sont des bijections réciproques l'une de l'autre et donc $g \circ f = id_E$.

Pour tout trouver l'exemple demandé, il faut donc se placer en dimension infinie.

Prenons $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f : \varphi \mapsto \varphi'$ et $g : \varphi \mapsto \Phi$ où Φ est la primitive de φ qui s'annule en 0.

Les applications f et g sont des endomorphismes de E et pour tout $\varphi \in E$:

- $(f \circ g)(\varphi) = \Phi' = \varphi$ donc $\underline{f \circ g = id_E}$;
- $(g \circ f)(\varphi) = g(\varphi') = \Psi$ où Ψ s'annule en 0, alors que φ ne s'annule pas forcément en 0, donc $\underline{g \circ f \neq id_E}$.

5) a. On a :

$$H = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X], P'(1) = P(1) = 0\right\} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X], (X-1)^2 \mid P\right\} = \left\{(X-1)^2 Q, Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\right\}$$
$$= \left\{(X-1)^2 \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k, \left(a_0, \dots, a_{n-2}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}\right\} = \operatorname{Vect}\left((X-1)^2, (X-1)^2 X, \dots, (X-1)^2 X^{n-2}\right)$$

Donc :

$$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

Remarque : La famille $\left((X-1)^2, (X-1)^2 X, \dots, (X-1)^2 X^{n-2}\right)$ est échelonnée en degrés donc libre donc, avec cette méthode, on a immédiatement $\dim H = n-1$.

b. $P_n = X^n - nX - 1$ et $P_2 = X^2 - 2X - 1$.

Comme $\deg P_2 = 2$, le reste R de la division euclidienne de P_n par P_2 est de degré au plus 1, donc $R = aX + b$ avec a et b réels. Si Q est le quotient, on a :

$$P_n = X^n - nX - 1 = (X^2 - 2X - 1)Q + aX + b.$$

Les racines de $P_2 = X^2 - 2X - 1 = (X-1)^2 - 2$ sont $1 \pm \sqrt{2}$ donc :

$$\begin{cases} P_n(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^n - n(1-\sqrt{2}) - 1 = a(1-\sqrt{2}) + b \\ P_n(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^n - n(1+\sqrt{2}) - 1 = a(1+\sqrt{2}) + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n - n(1+\sqrt{2}) + n(1-\sqrt{2}) = a(1+\sqrt{2}) - a(1-\sqrt{2}) \\ b = (1-\sqrt{2})^n - n(1-\sqrt{2}) - 1 - a(1-\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - n \\ b = (1-\sqrt{2})^n - \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}) - 1 \\ \quad = \dfrac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - 1 \end{cases}$$

Donc, le reste de la division euclidienne de P_n par P_2 est :

$$\boxed{R = \left(\frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - n \right) X + \frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - 1}$$

c. On a vu que $H = \text{Vect}\left((X-1)^2, (X-1)^2 X, \ldots, (X-1)^2 X^{n-2}\right)$ avec $\deg\left((X-1)^2 X^k\right) = k+2$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$. Alors, la famille $\left(1, X, (X-1)^2, (X-1)^2 X, \ldots, (X-1)^2 X^{n-2}\right)$ est une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension $n+1$), donc c'est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Et comme $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$, on a :

$$\boxed{E = H \oplus \mathbb{R}_1[X]}$$

On a alors immédiatement $\dim E = n+1 = \dim H + \dim \mathbb{R}_1[X] = \dim H + 2$, donc :

$$\boxed{\dim H = n-1}$$

6) On a $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{K})$ avec $A, D \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Posons $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ (comme M est inversible, M^{-1}, donc A', B', C', D' existent). On a alors :

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} = I_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} AA' + BC' = I_n \\ AB' + BD' = 0_n \\ CA' + DC' = 0_n \\ CB' + DD' = I_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - BD^{-1}C)A' = I_n \\ B' = -A^{-1}BD' \\ C' = -D^{-1}CA' \\ (D - CA^{-1}B)D' = I_n \end{cases}$$

Ceci implique que $A-BD^{-1}C$ et $D-CA^{-1}B$ sont inversibles, et :

$$\begin{cases} A' = (A-BD^{-1}C)^{-1} \\ B' = -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ C' = -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} \\ D' = (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}}$$

7) a. Posons $\dim\ker u = \dim\operatorname{Im} u = p$. D'après le théorème du rang, $\dim\ker u + \dim\operatorname{Im} u = \dim E$, donc :

$$\boxed{\dim E = 2p \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*}$$

(p est non nul car $\dim E$ est non nulle).

b. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker u = \operatorname{Im} u$.

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $e_k \in \operatorname{Im} u$, donc il existe $e_{p+k} \in E$ tel que $e_k = u(e_{p+k})$.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{2p}) \in \mathbb{K}^{2p}$ tel que :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_{2p} e_{2p} = 0 .$$

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $e_k \in \ker u$, donc $u(e_k) = 0$ et, en appliquant u à la relation ci-dessus, on obtient :

$$\lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_p u(e_p) + \lambda_{p+1} u(e_{p+1}) + \dots + \lambda_{2p} u(e_{2p}) = \lambda_{p+1} e_1 + \dots + \lambda_{2p} e_p = 0 .$$

Comme la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une base, elle est libre, donc $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_{2p} = 0$. La relation initiale se récrit alors $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0$ et, toujours par liberté de $(e_1, \dots, e_p)$, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Finalement, tous les λ_k sont nuls, donc $\mathcal{B}$ est libre et comme elle contient $2p = \dim E$ vecteurs, c'est une base de *E*.

Enfin, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $u(e_k) = 0$ et $u(e_{p+k}) = e_k$, donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ 0_p & 0_p \end{pmatrix}}$$

Chapitre 7

1) En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\Delta_n = (1+x^2)\Delta_{n-1} + x\begin{vmatrix} -x & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x & & \vdots \\ 0 & -x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Puis en redéveloppant le second déterminant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_n = (1+x^2)\Delta_{n-1} - x^2\Delta_{n-2}.$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta_{n+2} = (1+x^2)\Delta_{n+1} - x^2\Delta_n \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_{n+2} - \Delta_{n+1} = x^2(\Delta_{n+1} - \Delta_n).$$

La suite $\left(\Delta_{n+1} - \Delta_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison x^2 et

On a $\Delta_2 - \Delta_1 = (1+x^2+x^4) - (1+x^2) = x^4$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n = (x^2)^{n-1}(\Delta_2 - \Delta_1) = x^{2(n+1)}.$$

Et pour $n \geq 2$:

$$\Delta_n - \Delta_1 = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\Delta_{k+1} - \Delta_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} x^{2(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} x^{2k} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_n = \Delta_1 + \sum_{k=2}^{n} x^{2k}.$$

Soit avec $\Delta_1 = 1 + x^2 = \sum_{k=0}^{1} x^{2k}$:

$$\boxed{\Delta_n = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}}$$

2) Si on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $C_j = U + a_jE_j$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, avec $U = E_1 + \dots + E_n$ (vecteur colonne qui ne contient que des 1). Alors :

$$\begin{aligned}
\det A &= \det\left(C_1, \dots, C_n\right) = \det\left(U + a_1E_1, U + a_2E_2, \dots, U + a_nE_n\right) \\
&= \det\left(U, U + a_2E_2, \dots, U + a_nE_n\right) + \det\left(a_1E_1, U + a_2E_2, \dots, U + a_nE_n\right) \\
&= \det\left(U, a_2E_2, \dots, a_nE_n\right) + \det\left(a_1E_1, U + a_2E_2, \dots, U + a_nE_n\right) \\
&= a_2 \dots a_n \det\left(U, E_2, \dots, E_n\right) + a_1 \det\left(E_1, U + a_2E_2, \dots, U + a_nE_n\right) \\
&= a_2 \dots a_n \det\left(U - E_2 \dots - E_n, E_2, \dots, E_n\right) + a_1 \det\left(E_1, U + a_2E_2, \dots, U + a_nE_n\right) \\
&= a_2 \dots a_n \det\left(E_1, E_2, \dots, E_n\right) + a_1 \det\left(E_1, U + a_2E_2, \dots, U + a_nE_n\right) \\
&= \prod_{i=1, i\neq 1}^{n} a_i + a_1 \det\left(E_1, U + a_2E_2, \dots, U + a_nE_n\right) \\
&= \prod_{i=1, i\neq 1}^{n} a_i + a_1 \det\left(E_1, U, U + a_3E_3, \dots, U + a_nE_n\right) + a_1 \det\left(E_1, a_2E_2, U + a_3E_3, \dots, U + a_nE_n\right) \\
&= \prod_{i=1, i\neq 1}^{n} a_i + \prod_{i=1, i\neq 2}^{n} a_i + a_1a_2 \det\left(E_1, E_2, U + a_3E_3, \dots, U + a_nE_n\right)
\end{aligned}$$

En continuant ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}\det A &= \prod_{i=1,i\neq 1}^{n} a_i + \prod_{i=1,i\neq 2}^{n} a_i + \ldots + \prod_{i=1,i\neq n-1}^{n} a_i + a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \det\left(E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, U + a_n E_n\right) \\ &= \prod_{i=1,i\neq 1}^{n} a_i + \prod_{i=1,i\neq 2}^{n} a_i + \ldots + \prod_{i=1,i\neq n-1}^{n} a_i + a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \det\left(E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, U\right) + a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \det\left(E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, a_n E_n\right) \\ &= \prod_{i=1,i\neq 1}^{n} a_i + \prod_{i=1,i\neq 2}^{n} a_i + \ldots + \prod_{i=1,i\neq n-1}^{n} a_i + \prod_{i=1,i\neq n}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} a_i\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\boxed{\det A = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1,i\neq k}^{n} a_i}$$

3) Le sens réciproque est immédiat.

Supposons que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+X) = \det X$.

Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A et supposons aussi que A est non nulle, donc qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $C_j \neq 0$. On peut alors compléter $-C_j$ en une base $\left(U_1, \ldots, U_{j-1}, -C_j, U_{j+1}, \ldots, U_n\right)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notons X la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $U_1, \ldots, U_{j-1}, -C_j, U_{j+1}, \ldots, U_n$.

On a alors $X \in GL_n(\mathbb{R})$, donc $\det X \neq 0$ et la $j^{\text{ième}}$ colonne de $A+X$ est $C_j - C_j = 0$, donc $\det(A+X) = 0$. Ainsi, $\det(A+X) \neq \det X$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, toutes les colonnes de A sont nulles, donc A est nulle.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\forall\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+X) = \det X \iff A = 0_n}$$

4) On a :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2a & -b & -c & -d \\ -b & X & 0 & 0 \\ -c & 0 & X & 0 \\ -d & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = d\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \end{vmatrix} + X\begin{vmatrix} X-2a & -b & -c \\ -b & X & 0 \\ -c & 0 & X \end{vmatrix} = X^2\left(X^2 - 2aX - b^2 - c^2 - d^2\right).$$

Et $X^2 - 2aX - b^2 - c^2 - d^2 = (X-a-s)(X-a+s)$ avec $s = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Ainsi :

$$\chi_A = X^2(X-a-s)(X-a+s).$$

Les valeurs propres de A sont donc 0, $a+s$ et $a-s$. Reste à voir si elles sont distinctes.

Comme $\left(a,b,c,d\right) \neq \left(0,0,0,0\right)$, on a $s > 0$, donc $a+s \neq a-s$.

Si $a-s=0$, alors $a^2 = s^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$, donc $b^2+c^2+d^2 = 0$, soit $b=c=d=0$ (donc $a \neq 0$) et $s = |a|$. Enfin, comme $a = s$, on $a > 0$. Réciproquement, si $b=c=d=0$ et $a>0$, alors $a-s=0$, et $a+s=2a$.

De même, $a+s=0$ si et seulement si $b=c=d=0$ et $a<0$, et $a-s=2a$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Si } b=c=d=0 \text{ et } a\neq 0, \text{ alors } Sp(A) = \left\{0, 2a\right\}, \text{ sinon } Sp(A) = \left\{0, a-s, a+s\right\} \text{ avec } s = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}.}$$

5) On a $\chi_A = \det\left(X I_n - A\right)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \det\left(xI_n - A^{-1}\right) = \det\left(xA^{-1}\left(A - \frac{1}{x} I_n\right)\right) = x^n \det A^{-1} \det\left(A - \frac{1}{x} I_n\right) = \frac{(-x)^n}{\det A} \chi_A\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc :

$$\boxed{\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{(-1)^n}{\det A} X^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)}$$

Chapitre 8

1) Remarquons que :

$$A\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac&ad\\ab&b^2&bc&bd\\ac&bc&c^2&cd\\ad&bd&cd&d^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}.$$

Comme $a\neq 0$, $\lambda=a^2+b^2+c^2+d^2$ est une valeur propre non nulle de A. La dimension du sous-espace propre E_λ associé est de dimension au moins 1.

Si on note C_1,C_2,C_3,C_4 les colonnes de A et $C=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$, on a $C\neq 0$ et $C_1=aC, C_2=bC, C_3=cC, C_4=dC$ donc $\operatorname{Im}A=\operatorname{Vect}(C)$ et $rg\,(A)=1$, donc 0 est valeur propre et le sous-espace propre $E_0=\ker A$ associé est de dimension 3.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est au plus 4, on a :

$$Sp\,(A)=\{0,\lambda\},\ \dim E_0=3 \text{ et } \dim E_\lambda=1 \text{ avec } E_\lambda=\operatorname{Vect}(C).$$

On a $\dim E_0+\dim E_\lambda=4=\dim\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable.

Enfin, si (E_1,E_2,E_3,E_4) est la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{cases}AE_1=C_1=aC\\AE_2=C_2=bC\\AE_3=C_3=cC\\AE_4=C_4=dC\end{cases}\quad\text{donc}\quad\begin{cases}A(aE_2-bE_1)=0\\A(aE_3-cE_1)=0\\A(aE_4-dE_1)=0\end{cases}$$

Comme $a\neq 0$, la famille $(aE_2-bE_1, aE_3-cE_1, aE_4-dE_1)$ est une famille libre de trois vecteurs de $E_0=\ker A$, qui est de dimension 3. C'en est donc une base et ainsi, avec $\lambda=a^2+b^2+c^2+d^2$:

$$\boxed{Sp\,(A)=\{0,\lambda\},\ E_0=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-b\\a\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-c\\0\\a\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-d\\0\\0\\a\end{pmatrix}\right),\ E_\lambda=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right) \text{ et } A \text{ est diagonalisable.}}$$

2) En développant par rapport à la première ligne :

$$\chi_A=\begin{vmatrix}X-2&0&-2\\a&X-1&0\\-1&-1&X\end{vmatrix}=(X-2)\begin{vmatrix}X-1&0\\-1&X\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}a&X-1\\-1&-1\end{vmatrix}$$
$$=(X-2)(X-1)X-2\big(X-1-a\big)=X^3-3X^2+2(a+1)$$

On pose $f(x)=x^3-3x^2+2(a+1)$. Après une étude rapide de f, on obtient le tableau :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2(a+1)$	$\searrow$	$2(a-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Alors, avec le théorème de la bijection continue, on peut conclure que :

- si $2(a+1)<0$ ou $2(a-1)>0$, soit $a<-1$ ou $a>1$, *f* admet une unique racine réelle (simple) et deux racines complexes conjuguées (distinctes) ;
- si $2(a+1)=0$ ou $2(a-1)=0$, soit $a=-1$ ou 1, *f* admet et deux racines réelles, dont une double (2 quand $a=1$, 0 quand $a=-1$) ;
- si $2(a-1)<0<2(a+1)$, soit $-1<a<1$, *f* admet deux racines réelles distinctes.

Dans le premier cas, *A* est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas dans $\mathbb{R}$; dans le troisième cas, *A* est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Quand $a=-1$, $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$ donne $x+y=x+z=0$, donc le sous-espace propre associé à la valeur propre double 0 est une droite : *A* n'est diagonalisable ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.

Quand $a=1$, $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\-1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ donne $x+y=z=0$, donc le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est une droite : *A* n'est diagonalisable ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.

Finalement :

- Si $a<-1$ ou $a>1$, *A* est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas dans $\mathbb{R}$.
- Si $a=-1$ ou 1, *A* n'est diagonalisable ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.
- Si $-1<a<1$, *A* est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (et donc dans $\mathbb{C}$).

3) En développant par rapport à la dernière ligne :

$$\chi_A=\begin{vmatrix}X&0&-1\\-2&X-1&0\\0&0&X-1\end{vmatrix}=(X-1)\begin{vmatrix}X&0\\-2&X-1\end{vmatrix}=X(X-1)^2.$$

Alors, $Sp(A)=\{0,1\}$ et on trouve $E_0=\ker A=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right)$ et $E_1=\ker(A-I_3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas 3, *A* n'est pas diagonalisable.

La famille $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre donc c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on a :

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=0\qquad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Alors, la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de *f*, l'endomorphisme canoniquement associé à *A* est $M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Ainsi :

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\text{ semblable à } \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.}$$

Si $\lambda \in Sp(M)$ et X est un vecteur propre associé, alors $MX = \lambda X$, donc $AX = M^2X = M(\lambda X) = \lambda MX = \lambda^2 X$. Ainsi, $\lambda^2 \in Sp(A) = \{0,1\}$, donc $\lambda^2 = 0$ ou 1, soit $\lambda = -1$ ou 0 ou 1. Donc :

$$\boxed{Sp(M) \subset \{-1,0,1\}}$$

Remarquons déjà que si *M* est diagonalisable, alors son carré, *A*, l'est aussi, ce qui est absurde. Donc, *M* n'est pas diagonalisable. Ainsi, on ne peut avoir $Sp(M) = \{-1,0,1\}$ (car *M* est 3×3).

Si $Sp(M)$ contient deux valeurs, alors les sous-espaces propres sont de dimension 1 (sinon *M* serait diagonalisable) et si $Sp(M)$ ne contient qu'une seule valeur, alors le sous-espace propre associé est de dimension au plus 2 (sinon *M* serait diagonalisable, donc scalaire).

Les sous-espaces propres sont de dimension 1 si *M* possède 2 vap et au plus 2 si *M* possède une seule vap.

Si 0 n'est pas valeur propre de *M*, alors *M* est inversible et son carré aussi. Comme $M^2 = A$ n'est pas inversible, *M* ne l'est pas non plus, et donc :

0 est valeur propre de *M*.

On a finalement pour l'instant trois cas : $Sp(M) = \{-1,0\}$ ou $\{0,1\}$ ou $\{0\}$.

Remarquons qu'il s'agit du spectre réel au complexe, donc si $Sp(M) = \{0\}$, on a $\chi_M = X^3$, donc $M^3 = 0_3$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Ainsi, *M* est nilpotente, donc $M^2 = A$ aussi et 0 est la seule valeur propre de *A*. Ceci est absurde, donc $Sp(M) \neq \{0\}$.

Ainsi, $Sp(M) = \{-1,0\}$ ou $\{0,1\}$.

Remarquons encore que $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est solution du problème si et seulement si $-M$ l'est. Or :

$$Sp(M) = \{-1,0\} \quad \Leftrightarrow \quad Sp(-M) = \{0,1\}.$$

Donc, il suffit de déterminer les solutions *M* telles que $Sp(M) = \{0,1\}$.

D'après ce qui précède, on a alors : $\dim\ker M = \dim\ker(M - I_3) = 1$.

Or, si $X \in \ker(M - \lambda I_3)$, on a $MX = \lambda X$, donc $AX = M^2X = \lambda^2 X = \lambda X$ (car $\lambda = 0$ ou 1, donc $\lambda^2 = \lambda$) et ainsi, $X \in \ker(A - \lambda I_3)$. Comme on a vu que $\dim\ker A = \dim\ker(A - I_3) = 1$, on a :

$$\ker M = \ker A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\ker(M - I_3) = \ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

En reprenant ce que l'on a vu plus haut on a $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si *u* est l'endomorphisme canoniquement associé à *M*, on a $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ (avec les sous-espaces propres de *M* vus ci-dessus).

Comme $f = u^2$, on a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(u^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 1 & b+bc \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ac = 1 \\ b(1+c) = 2 \\ c^2 = 1 \end{cases} \iff a = b = c = 1 .$$

(La troisième équation du système donne $c = \pm 1$, mais $c = -1$ est impossible du fait de la deuxième équation.)

Ainsi, $M_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc :

$$M = PM_{\mathcal{B}}(u)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et finalement :

$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ telles que } M^2 = A \text{ sont } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

4) Le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est annulateur $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$. Comme il est scindé à racines simples, *A* est diagonalisable et $Sp(A) \subset \{0,1,2\}$.

Or, *A* est inversible donc $0 \notin Sp(A)$ et $Sp(A) \subset \{1,2\}$.

Si on note n_1 et n_2 les multiplicités de 1 et 2 respectivement dans le polynôme caractéristique de *A* (égales ici aux dimensions des sous-espaces propres correspondants), on a :

$$\begin{cases} Tr(A) = n_1 + 2n_2 = 8 \\ n_1 + n_2 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} n_1 = 4 \\ n_2 = 2 \end{cases}$$

Ainsi, *A* est semblable à $D = diag(1,1,1,1,2,2)$.

Réciproquement, toute matrice semblable à cette matrice diagonale *D* vérifie les hypothèses, donc les matrices $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_6$ et $Tr(A) = 8$ sont les matrices :

$$\boxed{A = P^{-1}DP \text{ avec } D = diag(1,1,1,1,2,2) \text{ et } P \in GL_6(\mathbb{R}).}$$

On a vu que $A(A - I_6)(A - 2I_6) = 0_6$. Comme *A* est inversible, on a plus simplement $(A - I_6)(A - 2I_6) = 0_6$ et donc $(X-1)(X-2)$ est annulateur de *A*.

Soit *R* un polynôme annulateur de *A*. Les valeurs propres de *A* (1 et 2) sont racines de *R* donc $R = (X-1)(X-2)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Réciproquement, si pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, $(A - I_6)(A - 2I_6)Q(A) = 0_6 Q(A) = 0_6$, donc $(X-1)(X-2)Q$ est annulateur de *A*.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les polynômes annulateurs de } A \text{ sont les polynômes de la forme } (X-1)(X-2)Q \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X].}$$

5) On a $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&0&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\1&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Notons C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 les colonnes de A et $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$, identifié à $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

Les première et dernière colonnes de A étant identiques, on a :

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = \operatorname{Vect}(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5, e_2, e_3, e_4) = \operatorname{Vect}(e_1+e_5, e_2, e_3, e_4).$$

Comme la famille (e_1+e_5, e_2, e_3, e_4) est libre, on a $rg(A)=4$. Alors, $\dim\ker A = 1$ d'après le théorème du rang.

Comme $\dim\ker A = 1$, 0 est valeur propre de A, de multiplicité 1. On a $Ae_1 = C_1 = C_5 = Ae_5$, donc $A(e_1-e_5)=0$ et ainsi, $\ker A = \operatorname{Vect}(e_1-e_5)$.

De plus, pour tout $j \in [\![2,4]\!]$, $Ae_j = C_j = e_j$, donc 1 est valeur propre de A, de multiplicité au moins 3.

Comme on a 4 racines réelles de χ_A (comptées avec multiplicité) qui est de degré 5, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et si λ est la cinquième racine réelle de χ_A, on a :

$$Tr(A) = 5 = 0+1+1+1+\lambda.$$

Donc, $\lambda = 2$ et :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\\u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&0&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\1&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\\u\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\\u\end{pmatrix} \iff \begin{cases}-x+u=0\\x-y+u=0\\x-z+u=0\\x-t+u=0\\x-u=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=z=t=2x\\u=x\end{cases} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\\u\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Finalement, si $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^5$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} rg(A)=4 \\ \operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(e_1+e_5, e_2, e_3, e_4) \\ \ker A = \operatorname{Vect}(e_1-e_5) \\ Sp(A) = \{0,1,2\} \\ \ker(A-I_5) = \operatorname{Vect}(e_2, e_3, e_4) \\ \ker(A-2I_5) = \operatorname{Vect}(e_1+2e_2+2e_3+2e_4+e_5) \end{array}}$$

6) Il est clair que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $f(P) = P(1)X - P(3)(25-X^2) \in \mathbb{R}[X]$. De plus, les applications évaluations $P \mapsto P(1)$ et $P \mapsto P(3)$ sont linéaires, donc f est linéaire et ainsi :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = P(1)X + P(3)(X^2-25) \in \operatorname{Vect}(X, X^2-25)$, donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(X, X^2-25)$. Or :

$$f\left(\frac{1}{2}(3-X)\right) = X \qquad f\left(\frac{1}{2}(X-1)\right) = X^2-25.$$

Donc, $\mathrm{Vect}\left(X, X^2-25\right) \subset \mathrm{Im}\, f$ et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(X, X^2-25\right)}$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Comme la famille $\left(X, X^2-25\right)$ est libre (échelonnée en degrés), on a :

$$f(P) = P(1)X + P(3)\left(X^2-25\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(1) = P(3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X-1)(X-3) \mid P.$$

Ainsi :

$$\boxed{\ker f = \left\{(X-1)(X-3)Q \setminus Q \in \mathbb{R}[X]\right\}}$$

D'après ce qui précède, 0 est valeur propre de *f*.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$ une éventuelle valeur propre non nulle de *f* et *P* un vecteur propre associé.

On a $f(P) = \lambda P$, donc $P = \dfrac{1}{\lambda} f(P) \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(X, X^2-25\right)$, soit :

$$P = aX + b(X^2-25).$$

Alors, $P(1) = a - 24b$ et $P(3) = 3a - 16b$, et :

$$\begin{aligned} f(P) = \lambda P \quad &\Leftrightarrow \quad (a-24b)X + (3a-16b)\left(X^2-25\right) = \lambda a X + \lambda b\left(X^2-25\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - 24b = \lambda a \\ 3a - 16b = \lambda b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda-1 & 24 \\ 3 & -(\lambda+16) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme *P* est non nul, $(a,b) \neq (0,0)$, donc la matrice $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 24 \\ 3 & -(\lambda+16) \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, soit :

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 24 \\ 3 & -(\lambda+16) \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+16) - 72 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 15\lambda + 56 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -8 \text{ ou } -7.$$

On a alors :

$$f(P) = -8P \quad \Leftrightarrow \quad 3a - 8b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{a}{8}\left[8X + 3(X^2-25)\right]$$

$$f(P) = -7P \quad \Leftrightarrow \quad a - 3b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{a}{3}\left[3X + (X^2-25)\right]$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l} Sp(f) = \left\{-8, -7, 0\right\} \\ \ker\left(f + 8id\right) = \mathrm{Vect}\left(8X + 3(X^2-25)\right) \\ \ker\left(f + 7id\right) = \mathrm{Vect}\left(3X + (X^2-25)\right) \\ \ker f = \left\{(X-1)(X-3)Q \setminus Q \in \mathbb{R}[X]\right\} \end{array}}$$

7) Comme *A* est triangulaire supérieure, on a immédiatement $Sp(A) = \left\{a, g\right\}$.

Si $a = g$, alors *A* est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à aI_4, donc égale à aI_4 et donc si et seulement si $b = c = d = e = f = h = 0$.

Si $a \neq g$, alors A est diagonalisable si et seulement si $\dim\ker\left(A-aI_4\right)=\dim\ker\left(A-gI_4\right)=2$, soit :

$$rg\left(A-aI_4\right)=rg\left(A-gI_4\right)=2\,.$$

On a $A-aI_4=\begin{pmatrix}0 & b & c & d\\ 0 & 0 & e & f\\ 0 & 0 & g-a & h\\ 0 & 0 & 0 & g-a\end{pmatrix}$ et, comme $g-a\neq 0$, les vecteurs $\begin{pmatrix}c\\ e\\ g-a\\ 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}d\\ f\\ h\\ g-a\end{pmatrix}$ sont non colinéaires.

Alors, $rg\left(A-aI_4\right)=2$ si et seulement si $\begin{pmatrix}b\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}c\\ e\\ g-a\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d\\ f\\ h\\ g-a\end{pmatrix}\right)$, soit $b=0$.

De même (en raisonnant sur les lignes de $A-gI_4$), $rg\left(A-gI_4\right)=2$ si et seulement si $h=0$.

Finalement :

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ 0 & a & e & f\\ 0 & 0 & g & h\\ 0 & 0 & 0 & g\end{pmatrix}\text{ est diagonalisable si et seulement si }\begin{cases}a=g\\ b=c=d=e=f=h=0\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}a\neq g\\ b=h=0\end{cases}.}$$

8) On note $\mathcal{B}_c=\left(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $\phi\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a+b & a+b\\ c+d & c+d\end{pmatrix}$, donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_c}(\phi)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}$$

On a immédiatement :

$$\boxed{\operatorname{Im}\phi=\text{Vect}\left(E_{1,1}+E_{1,2},E_{2,1}+E_{2,2}\right)}$$

Avec le théorème du rang, on obtient $\dim\ker\phi=2$. Comme $\phi(E_{1,1})=\phi(E_{1,2})$ et $\phi(E_{2,1})=\phi(E_{2,2})$, on obtient :

$$\boxed{\ker\phi=\text{Vect}\left(E_{1,1}-E_{1,2},E_{2,1}-E_{2,2}\right)}$$

On a déjà $0\in Sp(\phi)$ avec $\dim\ker\phi=2$.

De plus, $\phi(E_{1,1})=\phi(E_{1,2})=E_{1,1}+E_{1,2}$ et $\phi(E_{2,1})=\phi(E_{2,2})=E_{2,1}+E_{2,2}$, donc :

$$\phi(E_{1,1}+E_{1,2})=2(E_{1,1}+E_{1,2})\text{ et }\phi(E_{2,1}+E_{2,2})=2(E_{2,1}+E_{2,2})\,.$$

Donc, $2\in Sp(\phi)$ avec $\dim\ker\left(\phi-2id\right)=2$.

Comme $\dim\ker\phi=\dim\ker\left(\phi-2id\right)=4=\dim\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\phi\text{ est diagonalisable avec }Sp(\phi)=\{0,2\}\text{ et }\begin{cases}\ker\phi=\text{Vect}\left(E_{1,1}-E_{1,2},E_{2,1}-E_{2,2}\right)\\ \ker\left(\phi-2id\right)=\text{Vect}\left(E_{1,1}+E_{1,2},E_{2,1}+E_{2,2}\right)\end{cases}}$$

9) La linéarité de la transposition assure que $f : M \mapsto M + 2\,{}^tM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit λ une éventuelle valeur propre de *f* et *M* un vecteur propre associé. On a $f(M) = M + 2\,{}^tM = \lambda M$, donc :

$${}^tM = \frac{1}{2}(\lambda - 1)M \quad \Leftrightarrow \quad M = \frac{1}{2}(\lambda - 1)\,{}^tM \text{ (en transposant)}$$

Donc, $M = \dfrac{1}{4}(\lambda - 1)^2 M$ et comme $M \neq 0$, on obtient $\dfrac{1}{4}(\lambda - 1)^2 = 1$, soit :

$$\lambda = -1 \text{ ou } 3\,.$$

Les potentielles valeurs propres de *f* sont donc – 1 et 3.

Pour $\lambda = -1$, on obtient ${}^tM = -M$, donc le sous-espace propre associé à – 1 est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrice antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $\lambda = 3$, on obtient ${}^tM = M$, donc le sous-espace propre associé à – 1 est $S_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrice symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi :

$$\boxed{Sp(f) = \{-1, 3\}}$$

Comme $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

On a $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} Tr(f) = -\dfrac{n(n-1)}{2} + 3\dfrac{n(n-1)}{2} = n(n-1) \\ \det f = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, 3^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{array}}$$