Exercices d'entrainement – Corrigés des chapitres 17 à 20

Chapitre 17

Dans tous les exercices de ce chapitre, on note $\mathcal{B}_c = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Les colonnes de A sont orthonormées, donc A est orthogonale. Cherchons les vecteurs invariants par u.

Soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbb{R}^3$, on a $u(\vec{v}) = \vec{v}$ si et seulement si :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y-3z=7x \\ -6x+3y+2z=7y \\ 3x+2y+6z=7z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-6y+3z=0 \\ 6x+4y-2z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=2y \end{cases}$$

Donc, $\ker\left(u - id_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}\left(\vec{j} + 2\vec{k}\right)$ est une droite et ainsi :

$$\boxed{u \text{ est une rotation d'axe } \mathrm{Vect}\left(\vec{j}+2\vec{k}\right).}$$

Si α est l'angle de u, on a $1 + 2\cos\alpha = Tr(A) = \dfrac{11}{7}$, donc $\cos\alpha = \dfrac{2}{7}$ et $\alpha = \pm \arccos\left(\dfrac{2}{7}\right)$ $[2\pi]$.

Le vecteur $\vec{i}$ est orthogonale à l'axe et $\vec{i} \wedge u(\vec{i}) = \vec{i} \wedge \left(\dfrac{2}{7}\vec{i} - \dfrac{6}{7}\vec{j} + \dfrac{3}{7}\vec{k}\right) = -\dfrac{6}{7}\vec{k} - \dfrac{3}{7}\vec{j} = -\dfrac{3}{7}\left(\vec{j} + 2\vec{k}\right)$, donc si l'axe $\mathrm{Vect}\left(\vec{j}+2\vec{k}\right)$ est orienté par $\vec{j}+2\vec{k}$, on a $\alpha = -\arccos\left(\dfrac{2}{7}\right)$ $[2\pi]$.

Finalement :

$$\boxed{u \text{ est une rotation d'axe dirigé et orienté par } \vec{j}+2\vec{k} \text{ et d'angle } -\arccos\left(\frac{2}{7}\right).}$$

2) On a $\inf\limits_{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\| = \inf\limits_{Y \in \mathrm{Im}\,A} \|Y - B\|$. Or, $\det A = 6 \neq 0$, donc A est inversible et $\mathrm{Im}\,A = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors, on a $\|AX - B\| = 0$ pour $X = A^{-1}B$, donc $\inf\limits_{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\| = 0$, atteint pour $X = A^{-1}B$.

Enfin :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y-z=1 \\ x-y+2z=1 \\ -x+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{6} \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\inf_{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\| = 0, \text{ atteint pour } X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.}$$

3) Un vecteur normal à P est $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, qui dirige D, donc :

$$\boxed{P \perp D}$$

Notons p la projection orthogonale sur P.

Les vecteurs $\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{i}-\vec{k}$ sont orthogonaux à $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ (les deux produits scalaires sont nuls), donc appartiennent à $P=\ker\left(p-id_{\mathbb{R}^3}\right)$. Et $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ dirige $D=P^{\perp}=\ker\left(p+id_{\mathbb{R}^3}\right)$, donc :

$$\begin{cases} p(\vec{i}-\vec{j})=p(\vec{i})-p(\vec{j})=\vec{i}-\vec{j} \\ p(\vec{i}-\vec{k})=p(\vec{i})-p(\vec{k})=\vec{i}-\vec{k} \\ p(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=p(\vec{i})+p(\vec{j})+p(\vec{k})=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(\vec{i})=\dfrac{1}{3}\left(\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}\right) \\ p(\vec{j})=\dfrac{1}{3}\left(-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\right) \\ p(\vec{k})=\dfrac{1}{3}\left(-2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right) \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_c}(p)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

4) Les colonnes de M sont orthonormées, donc M est orthogonale. De plus :

$$\det M=\frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+2C_3}{=} \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 9 & 8 & 4 \\ -18 & 4 & -7 \end{vmatrix} \underset{C_3\leftarrow C_3+4C_2}{=} \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 36 \\ -18 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Et, en développant par rapport à la deuxième colonne, on obtient :

$$\det M=-\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme orthogonal indirect.}}$$

Cherchons les vecteurs invariants par f.

Soit $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\in\mathbb{R}^3$, on a $u(\vec{v})=\vec{v}$ si et seulement si :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+y-4z=9x \\ x+8y+4z=9y \\ -4x+4y-7z=9z \end{cases} \Leftrightarrow x-y+4z=0.$$

L'ensemble des vecteurs invariants par f donc le plan d'équation $x-y+4z=0$, donc :

$$\boxed{f \text{ est le réflexion par rapport au plan d'équation } x-y+4z=0.}$$

On note g la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe D dirigé et orienté par $\vec{i}+\vec{j}$.

On a $D=\mathrm{Vect}(\vec{u})$ avec $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$ et $\vec{k}\in D^{\perp}$. Alors :

$$\begin{cases} g(\vec{u})=\vec{u} \\ g(\vec{k})=\vec{u}\wedge\vec{k}=\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j}) \\ g(\vec{v})=\vec{v}\wedge\vec{k}=-\vec{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\vec{i}+\vec{j})=g(\vec{i})+g(\vec{j})=\vec{i}+\vec{j} \\ g(\vec{k})=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \\ g(\vec{i}-\vec{j})=g(\vec{i})-g(\vec{j})=-\sqrt{2}\,\vec{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\vec{i})=\frac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}-\sqrt{2}\,\vec{k}\right) \\ g(\vec{j})=\frac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}+\sqrt{2}\,\vec{k}\right) \\ g(\vec{k})=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i}-\vec{j}\right) \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\text{La matrice de } g \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}^3 \text{ est } N=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.}$$

Un vecteur normal à P est $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, donc $P=\left(\mathrm{Vect}(\vec{n})\right)^{\perp}$. Comme f et g sont des isométries $g\circ f$ en est une aussi, donc conserve l'orthogonalité et ainsi, l'image de P par $g\circ f$ est un plan de vecteur normal $g\circ f(\vec{n})=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ avec :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=NM\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 11 \\ 25 \\ 8\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Donc, si $g\circ f(\vec{n})=\frac{1}{18}\left(11\vec{i}+25\vec{j}+8\sqrt{2}\,\vec{k}\right)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{L'image du plan } P: x+y+z=0 \text{ par } g\circ f \text{ est le plan } P': 11\,x+25\,y+8\sqrt{2}\,z=0.}$$

Chapitre 18

1) On a pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\operatorname{sh} t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Soit $f:t\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n$ une éventuelle solution de (E): $tx''+2x'-tx=0$, développable en série entière sur $I=\left]-R;R\right[$ avec $R>0$. On a alors, pour tout $t\in I$:

$$t\,f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}t^n$$
$$f'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,a_n t^{n-1}=a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}t^n$$
$$t\,f''(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n\,a_{n+1}t^n$$

Donc :

$$\begin{aligned}t\,f''(t)+2f'(t)-t\,f(t)&=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n\,a_{n+1}t^n+2a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}2(n+1)\,a_{n+1}t^n-\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}t^n\\&=2a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)\,a_{n+1}-a_{n-1}\right]t^n\end{aligned}$$

Alors, *f* est solution de (E) sur *I* si et seulement si pour tout $t\in I$, $t\,f''(t)+2f'(t)-t\,f(t)=0$, ce qui donne par unicité du développement en série entière, $a_1=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$(n+2)(n+1)\,a_{n+1}=a_{n-1}\quad\Leftrightarrow\quad n!(n+2)(n+1)\,a_{n+1}=n!\,a_{n-1}\quad\Leftrightarrow\quad(n+2)!\,a_{n+1}=n!\,a_{n-1}.$$

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+3)!\,a_{n+2}=(n+1)!\,a_n$.

En remplaçant successivement *n* par $2p$, puis $2p+1$, ceci donne pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$\big(2(p+1)+1\big)!\,a_{2(p+1)}=(2p+3)!\,a_{2p+2}=(2p+1)!\,a_{2p}$$
$$\big([2(p+1)+1]+1\big)!\,a_{2(p+1)+1}=(2p+4)!\,a_{2p+4}=\big((2p+1)+1\big)!\,a_{2p+1}$$

Donc, les suites $\big((2p+1)!\,a_{2p}\big)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\big(((2p+1)+1)!\,a_{2p+1}\big)\,p\in\mathbb{N}$ sont constantes, soit pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$(2p+1)!\,a_{2p}=a_0$$
$$(2p+2)!\,a_{2p+1}=a_1$$

Avec $a_1=0$ et $a_0\in\mathbb{R}$, on obtient pour tout $p\in\mathbb{N}$, $a_{2p}=\dfrac{a_0}{(2p+1)!}$ et $a_{2p+1}=0$, et donc :

$$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_0}{(2n+1)!}t^{2n}=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, $f(t)=a_0\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$ et $R=+\infty$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Une solution de } (E) \text{ développable en série entière sur } \mathbb{R} \text{ est } f:t\mapsto\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh} t}{t} & \text{quand } t\neq 0\\ 1 & \text{quand } t=0\end{cases}.}$$

Cherchons une autre solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme $g=\varphi f$ avec φ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme produit de telles fonctions : f étant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) et pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}tg''(t)+2g'(t)-tg(t)&=t\varphi''(t)f(t)+2t\varphi'(t)f'(t)+t\varphi(t)f''(t)+2\varphi'(t)f(t)+2\varphi(t)f'(t)-t\varphi(t)f(t)\\&=tf(t)\varphi''(t)+2\left[tf'(t)+f(t)\right]\varphi'(t)+\varphi(t)\left[tf''(t)+2f'(t)-tf(t)\right]\\&=tf(t)\varphi''(t)+2\left[tf'(t)+f(t)\right]\varphi'(t)\end{aligned}$$

Or, $tf(t)=\operatorname{sh}t$ et $tf'(t)+f(t)=\operatorname{ch}t$, donc $tg''(t)+2g'(t)-tg(t)=\operatorname{sh}t\,\varphi''(t)+2\operatorname{ch}t\,\varphi'(t)$ et ainsi, g est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\operatorname{sh}t\,\varphi''(t)+2\operatorname{ch}t\,\varphi'(t)=0.$$

Remarquons alors que pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{sh}t\neq 0$, donc l'équation ci-dessus équivaut à pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\operatorname{sh}^2t\,\varphi''(t)+2\operatorname{ch}t\operatorname{sh}t\,\varphi'(t)=\Phi'(t)=0$$

avec $\Phi(t)=\operatorname{sh}^2t\,\varphi'(t)$.

Ainsi, g est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si Φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi'=\dfrac{\lambda}{\operatorname{sh}^2}=-\lambda\left(\dfrac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}\right)'$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\varphi=-\lambda\dfrac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}+\mu$ et comme on cherche une solution, on peut prendre ici $\lambda=-1$ et $\mu=0$, ce qui donne $\varphi=\dfrac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}$, soit $g=\dfrac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}f$ et finalement :

Une autre solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\boxed{t\mapsto\frac{\operatorname{ch}t}{t}}$$

2) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire, d'ordre 1, avec second membre.

Soit $I=\left]-\infty;-1\right[$ ou $\left]-1;0\right[$ ou $\left]0;1\right[$ ou $\left]1;+\infty\right[$. Sur I, l'équation (E) se récrit :

$$y'+\frac{2}{x(x^2-1)}y=\frac{x}{x^2-1}.$$

L'équation homogène (H) est $y'+\dfrac{2}{x(x^2-1)}y=0$, de solutions $x\mapsto k\exp\left(-\displaystyle\int^x\frac{2}{t(t^2-1)}dt\right)$. Or :

$$-\int^x\frac{2}{t(t^2-1)}dt=\int^x\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\ln|x|-\ln\left|x^2-1\right|=\ln\left|\frac{x^2}{x^2-1}\right|.$$

Donc, les solutions de (H) sur I sont les fonctions $x\mapsto k\left|\dfrac{x^2}{x^2-1}\right|$ et comme $x\mapsto\dfrac{x^2}{x^2-1}$ est de signe constant sur I (fonction continue ne s'annulant pas), les solutions de (H) sur I sont les fonctions $x\mapsto\lambda\dfrac{x^2}{x^2-1}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \lambda(x)\dfrac{x^2}{x^2-1}$ avec λ dérivable sur I (variation de la constante). En remplaçant dans (E), on obtient $\lambda'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc on peut prendre $\lambda : x \mapsto \ln|x|$.

Ainsi, si $I =]-\infty;-1[$ ou $]-1;0[$ ou $]0;1[$ ou $]1;+\infty[$:

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } I \text{ sont les fonctions } x \mapsto \left(\lambda + \ln|x|\right)\frac{x^2}{x^2-1} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Remarquons que $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ est symétrique par rapport à 0 et que la fonction $x \mapsto \left(\lambda + \ln|x|\right)\dfrac{x^2}{x^2-1}$ est paire sur cet ensemble quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Or :

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\ln|x|\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\ln x\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x+1}\frac{\ln x}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\ln|x|\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2\ln|x|}{x^2-1}\right) = 0$$

Donc, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2-1}\ln|x|$, qui est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, comme produit de telles fonctions, admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ entier.

Ainsi (avec $\lambda = 0$), la fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-1}\ln|x| & \text{quand } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\} \\ 0 & \text{quand } x = 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{quand } x = \pm 1 \end{cases}$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont la restriction aux intervalles précédents est solution de (E), et donc :

$$\boxed{\text{Il existe une fonction continue sur } \mathbb{R} \text{ dont la restriction aux intervalles précédents est solution de } (E).}$$

Par contre, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to -1}\left(\left|\lambda\dfrac{x^2}{x^2-1}\right|\right) = \lim_{x\to 1}\left(\left|\lambda\dfrac{x^2}{x^2-1}\right|\right) = +\infty$, donc la fonction ci-dessus est la seule fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont la restriction aux intervalles précédents est solution de (E).

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$.

L'équation (E): $xy' - (1+\lambda)y = 0$ est une équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre 1.

Cette équation se récrit sur I :

$$y' - \frac{1+\lambda}{x}y = 0.$$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto k\exp\left(\int^x \dfrac{1+\lambda}{t}dt\right) = k|x|^{1+\lambda}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Les solutions de } xy' - (1+\lambda)y = 0 \text{ sur } I = \mathbb{R}_-^* \text{ ou } \mathbb{R}_+^* \text{ sont les fonctions } x \mapsto k|x|^{1+\lambda} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.}$$

Soit $\phi:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$; $P\mapsto XP'-P$. On a bien $\phi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ par linéarité de la dérivation.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ une éventuelle valeur propre de ϕ et P un vecteur propre associé. On a alors $\phi(P)=XP'-P=\lambda P$, soit $XP'-(1+\lambda)P=0$. Ainsi, la fonction polynômiale $x\mapsto P(x)$ est solution de $xy'-(1+\lambda)y=0$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe $k\in\mathbb{R}^*$ tel pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $P(x)=kx^{1+\lambda}$. Comme la fonction $x\mapsto P(x)$ est polynômiale, il faut que $1+\lambda\in\mathbb{N}$, donc que $\lambda\in\{-1\}\cup\mathbb{N}$. Alors, on a $P=kX^n$ avec $n=1+\lambda\in\mathbb{N}$.

Réciproquement, pour tout $\lambda\in\{-1\}\cup\mathbb{N}$, on a $X^{1+\lambda}\in\mathbb{R}[X]$ et :

- si $\lambda\in\mathbb{N}$, $\phi(X^{1+\lambda})=X(1+\lambda)X^{\lambda}-X^{1+\lambda}=\lambda X^{1+\lambda}$;
- si $\lambda=-1$, $\phi(1)=-1=\lambda 1$.

Dans tous les cas, on a $\phi(X^{1+\lambda})=\lambda X^{1+\lambda}$ et, comme $X^{1+\lambda}$ est non nul, ceci permet de conclure que λ est valeur propre de ϕ et que $X^{1+\lambda}$ est un vecteur propre associé.
Finalement :

$$\boxed{Sp(\phi)=\{-1\}\cup\mathbb{N} \text{ et pour tout } \lambda\in Sp(\phi)\text{, le sous-espace propre associé à } \lambda \text{ est } \operatorname{Vect}\left(X^{1+\lambda}\right).}$$

4) Pour tous $x,t\in\mathbb{R}$, $\sin(x-t)=\sin x\cos t-\cos x\sin t$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto g(t)\sin(x-t)$, $t\mapsto g(t)\sin t$ et $t\mapsto g(t)\cos t$ sont continues sur $\mathbb{R}$ comme produits de telles fonctions, donc $f(x)=\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt$ est bien défini et :

$$f(x)=\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt=\int_0^x g(t)\left[\sin x\cos t-\cos x\sin t\right]dt=\sin x\int_0^x g(t)\cos t\,dt-\cos x\int_0^x g(t)\sin t\,dt.$$

Les fonctions sin, cos, $x\mapsto\int_0^x g(t)\cos t\,dt$ et $x\mapsto\int_0^x g(t)\sin t\,dt$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc *f* l'est aussi en tant que différence de telles fonctions et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos x\int_0^x g(t)\cos t\,dt+\sin x\cos x\,g(x)+\sin x\int_0^x g(t)\sin t\,dt-\cos x\sin x\,g(x)\\&=\int_0^x g(t)\left[\cos x\cos t+\sin x\sin t\right]dt=\int_0^x g(t)\cos(x-t)\,dt\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est dérivable (et même } C^1\text{) sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\int_0^x g(t)\cos(x-t)\,dt.}$$

Comme pour *f*, f' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f''(x)&=-\sin x\int_0^x g(t)\cos t\,dt+g(x)\cos^2 x+\cos x\int_0^x g(t)\sin t\,dt+g(x)\sin^2 x\\&=-\int_0^x g(t)\left[\sin x\cos t-\cos x\sin t\right]dt+g(x)\\&=-\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt+g(x)=-f(x)+g(x)\end{aligned}$$

Ainsi, $f''+f=g$, donc :

$$\boxed{f \text{ est solution de } y''+y=g.}$$

On pose maintenant $g(t)=e^t$ et on veut résoudre $y''+y=e^x$, qui est une équation différentielle linéaire, d'ordre 2, à coefficients constants et avec second membre.

L'équation caractéristique associée est $r^2+1=0$, de racines $-i$ et i, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x\mapsto \lambda\cos x+\mu\sin x$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Le second membre est de la forme $e^{\alpha x}$ où $\alpha=1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. On peut donc chercher une solution particulière de la forme $x\mapsto Ae^x$ avec $A\in\mathbb{R}$ et en remplaçant dans l'équation on trouve $A=\dfrac{1}{2}$, donc une solution particulière de $y''+y=e^x$ est $x\mapsto \dfrac{1}{2}e^x$.

Avec ce qui précède, on aurait pu prendre $x\mapsto \int_0^x e^t\sin(x-t)\,dt$ comme solution particulière, mais le calcul de l'intégrale est finalement plus long. Penser à $\int_0^x e^t\sin(x-t)\,dt=\mathrm{Im}\left(\int_0^x e^t e^{i(x-t)}dt\right)=\mathrm{Im}\left(e^{ix}\int_0^x e^{(1-i)t}dt\right)=\ldots$

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } y''+y=e^x \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x\mapsto \lambda\cos x+\mu\sin x+\frac{1}{2}e^x,\ \text{avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.}$$

5) On veut résoudre $(S):\begin{cases} x'(t)=2x(t)+y(t)\\ y'(t)=2y(t)\\ z'(t)=2x(t)-3y(t)+4z(t)\end{cases}$.

La deuxième équation donne immédiatement $y(t)=B\,e^{2t}$ avec $B\in\mathbb{R}$ et le système se récrit alors :

$$(S)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x'(t)-2x(t)=B\,e^{2t}\\ y(t)=B\,e^{2t}\\ z'(t)-4z(t)=2x(t)-3B\,e^{2t}\end{cases}\qquad \text{avec } B\in\mathbb{R}.$$

La première équation donne (en cherchant une solution particulière de la forme $t\mapsto kt\,e^{2t}$), $x(t)=A\,e^{2t}+Bt\,e^{2t}$ avec $A\in\mathbb{R}$ et le système se récrit alors :

$$(S)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x(t)=A\,e^{2t}+Bt\,e^{2t}\\ y(t)=B\,e^{2t}\\ z'(t)-4z(t)=\left(2Bt+2A-3B\right)e^{2t}\end{cases}\qquad \text{avec } A,B\in\mathbb{R}.$$

La troisième équation donne (en cherchant une solution particulière par la méthode de variation de la constante ou directement de la forme $t\mapsto (at+b)e^{2t}$), $z(t)=(-Bt+B-A)e^{2t}+Ce^{4t}$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (S) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les triplets } (x,y,z) \text{ avec } \begin{cases} x:t\mapsto (Bt+A)\,e^{2t}\\ y:t\mapsto B\,e^{2t}\\ z:t\mapsto Ce^{4t}-(Bt+A-B)\,e^{2t}\end{cases} \text{ et } A,B,C\in\mathbb{R}.}$$

On aurait pu aussi écrire le système matriciellement : $X'=AX$ *avec* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *et* $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\2&-3&4\end{pmatrix}$.

Chapitre 19

1) a. $f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x\sin^2 y}{x^2+y^2} & \text{quand } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{quand } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Comme $x^2+y^2=0$ si et seulement si $(x,y)=(0,0)$; la fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme quotient de telles fonctions. De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $|\sin y|\leq|y|$ donc :

$$|f(x,y)|=\frac{|x\sin^2 y|}{x^2+y^2}\leq\frac{|x|\,y^2}{x^2+y^2}\leq|x|.$$

Or, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$, donc le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$ et ainsi, *f* est continue en $(0,0)$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$$

b. $g:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^p y^q}{x^2+y^2} & \text{quand } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{quand } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ avec $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.

Comme $x^2+y^2=0$ si et seulement si $(x,y)=(0,0)$; la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiales.

Remarquons que pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ tel que $a+b\geq1$, on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x^a y^b|=0$, donc s'il existe $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ tel que $a+b\geq1$ tel que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $|g(x,y)|\leq|x^a y^b|$ alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0=g(0,0)$ et g est continue en 0.

Or, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a :

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq1,\ \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|\leq1 \text{ et } \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{1}{2}$$

car $2|x||y|-x^2-y^2=-\left(|x|-|y|\right)^2\leq0$ pour la dernière inégalité. Alors :

- si $p+q-2\geq1$, soit $p+q\geq3$, alors soit $p\geq2$ et $|g(x,y)|\leq|x^{p-2}y^q|$, soit $q\geq2$ et $|g(x,y)|\leq|x^p y^{q-2}|$, et dans les deux cas, g est continue en 0 ;
- si $p+q-2\leq0$, soit $p+q\leq2$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $g(x,x)=\dfrac{1}{2}x^{p+q-2}$ et :

$$\lim_{x\to0}|g(x,x)|=\begin{cases}½ & \text{quand } p+q=2\\ +\infty & \text{quand } p+q<2\end{cases}.$$

  Dans les deux cas, $\lim\limits_{x\to0}g(x,x)\neq0=g(0,0)$ et g n'est pas continue en 0.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2 \text{ si et seulement si } p+q\geq3.}$$

2) La fonction $f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2+2xyz$ est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

Et pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x^2+2yz \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y^2+2xz \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z^2+2xy.$$

On a alors :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x^2+2yz=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y^2+2xz=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z^2+2xy=0\end{cases}\iff\begin{cases}x^2=-yz\\ y^2=-xz\\ z^2=-xy\end{cases}$$

Ceci entraine que $x^3=y^3=z^3=-xyz$, donc que $x=y=z$ et $x^3=y^3=z^3=-xyz=-x^3$, ce qui revient à $x=y=z=0$. L'origine est donc le seul point critique de *f*.

On a $f(0,0,0)=0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x,0,0)=x^2\geq 0$ donc $f(0,0,0)=0$ n'est pas un maximum (local ou global). Reste à voir si c'est un minimum (local ou global), autrement dit si on a $f(x,y,z)\geq 0$ (au voisinage de $(0,0,0)$ ou sur $\mathbb{R}^3$ entier).

Pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, on a $a^2+b^2+c^2>0$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$f(at,bt,ct)=(a^2+b^2+c^2)t^2+2abc\,t^3\underset{t\to 0}{\sim}(a^2+b^2+c^2)t^2.$$

Comme $(a^2+b^2+c^2)t^2\geq 0$, on a $f(at,bt,ct)\geq 0$ au voisinage de $t=0$, donc *f* est positive au voisinage de $(0,0,0)$ et $f(0,0,0)=0$ est un minimum local.

Par contre, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x,x,x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2+2x^3\right)=-\infty$, donc *f* n'est pas positive sur $\mathbb{R}^3$ entier, donc $f(0,0,0)=0$ n'est pas un minimum global.

Finalement :

Le seul extremum de *f* est un minimum local : 0 atteint en $(0,0,0)$.

Remarquons que 0 n'est pas attient seulement en $(0,0,0)$*, on a par exemple* : $f\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)=0$.

3) La fonction $f:(x,y)\mapsto x^2y+\ln(1+y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de telles fonctions. De plus, $A=[-1,1]^2$ est fermé et borné (donc compact) dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, qui est de dimension finie.

Alors, *f* est bornée et atteint ses bornes sur *A*, autrement dit :

La fonction *f* possède un minimum et un maximum sur $A=[-1,1]^2$.

La fonction *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de telles fonctions et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+\frac{2y}{1+y^2}.$$

Alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + \dfrac{2y}{1+y^2} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{2y}{1+y^2} = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0.$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ possède un unique point critique sur } B = \left]-1,1\right[^2, \text{ qui est } (0,0).}$$

On a $f(0,0)=0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,x^3) = x^5 + \ln(1+x^6)$. Or, $\ln(1+x^6) \underset{x\to 0}{=} o(x^5)$, donc :

$$f(x,x^3) \underset{x\to 0}{\sim} x^5.$$

Comme x^5 change de signe en 0, il en va de même pour $f(x,x^3)$ et donc *f* n'est pas de signe constant au voisinage de 0, ce qui veut dire que :

$$\boxed{f(0,0)=0 \text{ n'est pas un extremum de } f.}$$

Si le minimum ou le maximum de *f* était atteint sur *B*, qui est ouvert, ce serait en un point critique de *f*, donc en $(0,0)$. Or, *f* n'est pas extrémale en $(0,0)$, donc le minimum et le maximum de *f* sur *A* sont atteints sur la frontière de *A*. Et, pour tout $(x,y) \in [-1,1]^2$, on a :

$$\begin{aligned} & f(-1,y) = f(1,y) = y + \ln(1+y^2) \\ & f(x,-1) = -x^2 + \ln 2 \\ & f(x,1) = x^2 + \ln 2 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$-1+\ln 2 \leq f(x,-1) \leq f(x,1) \leq 1 + \ln 2.$$

Par ailleurs, la fonction $y \mapsto y + \ln(1+y^2)$ est dérivable sur $[-1,1]$ en tant que somme de telles fonctions, de dérivée $y \mapsto 1 + \dfrac{2y}{1+y^2}$. Pour tout $y \in [-1,1]$, $1 + \dfrac{2y}{1+y^2} = \dfrac{(1+y)^2}{1+y^2} \geq 0$, donc $y \mapsto y + \ln(1+y^2)$ est croissante sur $[-1,1]$ et ainsi, pour tout $y \in [-1,1]$, on a :

$$-1+\ln 2 \leq f(-1,y) = f(1,y) \leq 1+\ln 2.$$

Ainsi, pour tout (x,y) appartenant à la frontière de *A*, on a :

$$-1+\ln 2 \leq f(x,y) \leq 1+\ln 2.$$

Comme $f(1,1) = 1+\ln 2$ et $f(1,-1) = -1+\ln 2$, on peut conclure que :

$$\boxed{\min_A f = -1+\ln 2 \text{ et } \max_A f = 1+\ln 2.}$$

4) La fonction $\varphi:(x,y)\mapsto(x,x^2+y)$ est de classe est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, car chaque composante est polynomiale. Si on pose alors $u=x$, $v=x^2+y$ et $g(u,v)=f(x,y)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+2x\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+2x\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)-2x\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v).$$

Et ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=0 \quad\Leftrightarrow\quad g(u,v)=\Psi(v)$$

avec Ψ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi :

Les solutions de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ sur $\mathbb{R}^2$ sont les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto\Psi(x^2+y)$ avec Ψ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 20

Dans tout ce qui suit, l'espace affine usuel (3D) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) La fonction *f* est de classe est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ comme différence d'un quotient de telles fonctions et d'une constante. Si on pose $g(t)=\dfrac{\arctan t}{1+t^2}$, on a $f(x,y,z)=g(xyz)-\dfrac{\pi}{8}$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,x)=yz\,g'(xyz) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,x)=xz\,g'(xyz) \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,x)=xy\,g'(xyz).$$

De plus, $g(1)=\dfrac{\arctan 1}{2}=\dfrac{\pi}{8}$, donc $f(1,1,1)=0$ et le point $(1,1,1)$ appartient bien à la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$. Une équation du plan tangent à cette surface en $(1,1,1)$ est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)(y-1)+\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)(z-1)=0.$$

Et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=g'(1)=\dfrac{1-2\arctan 1}{4}=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)\neq 0$, donc l'équation ci-dessus équivaut à :

$$x-1+y-1+z-1=0.$$

Ainsi, une équation du plan tangent en $(1,1,1)$ à la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$ est :

$$\boxed{x+y+z=3}$$

2) Notons $\vec{f}$ le projecteur vectoriel de $\mathbb{R}^3$ associé à *f*. Alors, $\vec{f}$ est le projecteur sur $\vec{P}=\mathrm{Vect}\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, parallèlement $\vec{D}=\mathrm{Vect}\left(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)$ et on a :

$$\begin{cases}\vec{f}(\vec{i})=\vec{i}\\ \vec{f}(\vec{j})=\vec{j}\\ \vec{f}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=\vec{f}(\vec{i})-\vec{f}(\vec{j})+\vec{f}(\vec{k})=\vec{0}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\vec{f}(\vec{i})=\vec{i}\\ \vec{f}(\vec{j})=\vec{j}\\ (\vec{k})=-\vec{i}+\vec{j}\end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{M_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\vec{f})=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace et $M'(x',y',z')=f(M)$.

Comme *O* appartient à *P*, on a $\overrightarrow{OM}'=\vec{f}(\overrightarrow{OM})$, donc :

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-z\\y+z\\0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x'=x-z\\y'=y+z.\\z'=0\end{cases}$$

Soit $M'(x',y',z')$. On a :

$$\begin{aligned}
M' \in \mathscr{E} = f(\mathscr{C}) &\Leftrightarrow \exists M(x,y,z) \in \mathscr{C},\ M' = f(M) \\
&\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+z^2=1,\ y=0, \begin{cases} x' = x - z \\ y' = y + z \\ z' = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists (x,z) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+z^2=1, \begin{cases} x' = x - z \\ y' = z \\ z' = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists (x,z) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+z^2=1, \begin{cases} x = x' + y' \\ z = y' \\ z' = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (x'+y')^2 + y'^2 = 1 \\ z' = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (x'+y')^2 + y'^2 = 1 \\ z' = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x'^2 + 2x'y' + 2y'^2 = 1 \\ M' \in P \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement :

$\boxed{\mathscr{E} \text{ a bien pour équation } x^2+2y^2+2xy=1 \text{ dans le plan } P \text{ rapporté au repère } (O,\vec{i},\vec{j}).}$

3) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y) = f(y,x) = f(-y,-x).$$

Donc, si $M(x,y,z) \in S$, alors :

$$\begin{aligned}
&M_1(-x,y,z) \in S \\
&M_2(x,-y,z) \in S \\
&M_3(y,x,z) \in S \\
&M_4(-y,-x,z) \in S
\end{aligned}$$

Or, M_1, M_2, M_3, M_4 sont les images respectives de M par les réflexions par rapport aux plans $P_1 = (yOz)$, $P_2 = (xOz)$, P_3 d'équation $y = x$ et P_4 d'équation $y = -x$. Donc :

$\boxed{\text{La surface } S \text{ est invariante par les réflexions par rapport aux plans } P_1=(yOz),\ P_2=(xOz),\ P_3 \text{ d'équation } y=x \text{ et } P_4 \text{ d'équation } y=-x.}$

La fonction f est de classe est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, car polynomiale, et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 4xy^2 = 2x(1-2y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 4x^2y = 2y(1-2x^2)$$

Alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-2y^2)=0 \\ 2y(1-2x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\text{Les points critiques de } f \text{ sont } (0,0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

On a $f(0,0)=0$ et, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a :

$$f(at,bt)=(a^2+b^2)t^2-2a^2b^2t^4 \underset{t\to 0}{\sim} (a^2+b^2)t^2$$

Comme $(a^2+b^2)t^2\geq 0$ pour tout réel t, ceci prouve que :

$$\boxed{0 \text{ est un minimum local en } (0,0,0).}$$

Remarquons que $f(0,1)=-1<0$, donc 0 n'est pas un minimum global.

On a $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$, et les points $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$ sont les images respectives du point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$ par les réflexions par rapport aux plans P_1, P_2 et P_4. Donc, f est extrémale en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, si et seulement si elle l'est aussi en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x,y)-\frac{1}{2}=x^2+y^2-2x^2y^2-\frac{1}{2}=-2\left(x^2y^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}\right)=-2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\left(y^2-\frac{1}{2}\right).$$

Donc, si $|x|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $-2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\geq 0$ et $f(x,y)-\frac{1}{2}$ change de signe que $y^2-\frac{1}{2}$ change de signe. Ainsi, f n'est pas extrémale en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, et donc pas en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet 0 pour unique extremum local (et non global).}}$$

4) S est la surface de l'espace d'équation cartésienne $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1=0$.

La fonction f est de classe est C^1 sur $\mathbb{R}^3$, car polynomiale, et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=4y \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z\,.$$

Alors, si $M(a,b,c)$ est un point de S, on a $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ (car $a^2+2b^2+c^2=1$), donc le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c),\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\right)$ est non nul et une équation cartésienne du plan tangent T_M à S en M est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)(y-b)+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)(z-c)=2a(x-a)+4b(y-b)+2c(z-c)=0\,.$$

Soit :

$$ax+2by+cz=a^2+2b^2+c^2=1\,.$$

Alors :

$$A(1,1,0)\in T_M \quad\Leftrightarrow\quad a+2b=1 \quad\Leftrightarrow\quad a=1-2b\,.$$

Et avec $a^2+2b^2+c^2=1$, on a $c^2=1-(1-2b)^2-2b^2=4b-6b^2=2b(2-3b)$. Ceci n'est possible que si $b(2-3b)\geq 0$, soit $0\leq b\leq\frac{2}{3}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Les plans tangents à } S \text{ passant par le point } A \text{ de coordonnées } (1,1,0) \text{ sont les plans d'équation } ax+2by+cz=1 \text{ avec } \begin{cases} a=1-2b \\ b\in\left[0,\frac{2}{3}\right] \\ c=\pm\sqrt{2b(2-3b)} \end{cases}.}$$

Soit T_M un éventuel plan tangent à S en $M(a,b,c)$ contenant D. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, le point $N(x,x,0)$ appartient à T_M, donc ses coordonnées vérifient l'équation $ax+2by+cz=1$ de T_M, soit :

$$ax+2bx=(a+2b)x=1\,.$$

Ceci doit être vrai pour tout réel x, ce qui est impossible, donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de plan tangent à } S \text{ contenant la droite } D.}$$

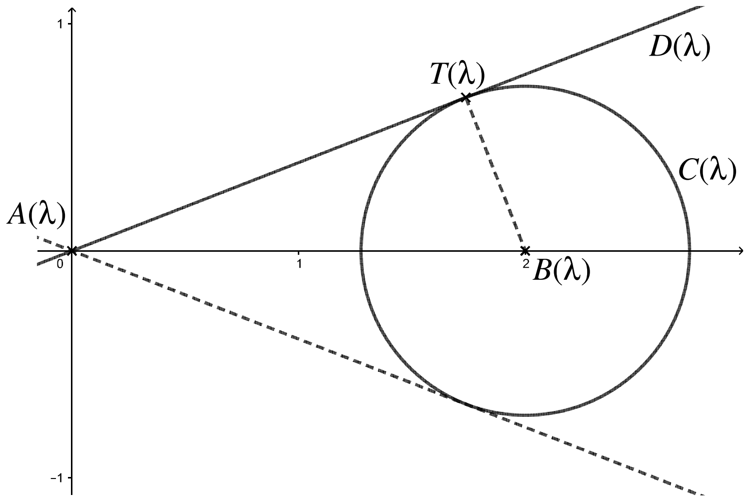
5) La surface S de l'espace d'équation cartésienne $(x-2)^2+y^2+z^2=1$ est la sphère de centre $\Omega(2,0,0)$ et de rayon 1.

La droite $D(\lambda)$ est horizontale et passe par $A(\lambda)$, de coordonnées $(0,0,\lambda)$, si et seulement si elle est incluse dans le plan horizontal $P(\lambda)$ d'équation $z=\lambda$.

Notons $B(\lambda)$ le point de coordonnées $(2,0,\lambda)$.

L'intersection de $P(\lambda)$ et S est soit vide, quand $|\lambda|>1$, soit le point $B(\lambda)$ quand $|\lambda|=1$, soit un cercle $C(\lambda)$ de centre $B(\lambda)$ et de rayon $\sqrt{1-\lambda^2}$ quand $|\lambda|<1$.

Alors, si $|\lambda|>1$, $D(\lambda)$ n'existe pas, si $|\lambda|=1$, $D(\lambda)=\big(A(\lambda)B(\lambda)\big)$ et si $|\lambda|<1$, $D(\lambda)$ est tangente à $C(\lambda)$ en un point $T(\lambda)$ tel que sur la figure ci-dessous (en coupe dans le plan $P(\lambda)$ et il existe deux telles droites symétriques par rapport au plan (xOz).



Si $T(\lambda)$ a pour coordonnées (x, y, λ), on a :

$$\begin{cases} D(\lambda)=\big(A(\lambda)T(\lambda)\big)\perp\big(B(\lambda)T(\lambda)\big) \\ T(\lambda)\in C(\lambda) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{A(\lambda)T(\lambda)}\cdot\overrightarrow{B(\lambda)T(\lambda)}=0 \\ B(\lambda)T(\lambda)=\sqrt{1-\lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)+y^2=0 \\ (x-2)^2+y^2=1-\lambda^2 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$(x,y,\lambda)=\left(\frac{3+\lambda^2}{2},\pm\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2},\lambda\right)$$

Alors, $D(\lambda)$ est la droite dirigée par $\vec{u}(\lambda)=\overrightarrow{A(\lambda)T(\lambda)}$, de coordonnées $\left(\frac{3+\lambda^2}{2},\pm\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2},0\right)$ et passant par $A(\lambda)$. Remarquons que quand $|\lambda|=1$, on a $\lambda^2=1$, donc $\frac{3+\lambda^2}{2}=2$ et $\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2}=0$, et on retrouve le cas vu plus haut.

Ainsi :

- si $|\lambda|>1$, $D(\lambda)$ n'existe pas ;
- si $|\lambda|\leq 1$, $D(\lambda)$ est la droite dirigée par $\vec{u}(\lambda)\left(\frac{3+\lambda^2}{2},\pm\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2},0\right)$ et passant par $A(\lambda)$.

D'après ce qui précède, $\Delta=\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}}D(\lambda)=\bigcup_{\lambda\in[-1,1]}D(\lambda)$ et, pour un point $M(x,y,z)$ de l'espace, on a :

$$\begin{aligned} M\in\Delta &\Leftrightarrow \exists\,\lambda\in[-1,1],\ M\in D(\lambda) \\ &\Leftrightarrow \exists\,\lambda\in[-1,1],\ \overrightarrow{A(\lambda)M} \text{ et } \vec{u}(\lambda) \text{ sont colinéaaires} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in [-1,1], \begin{vmatrix} x & \dfrac{3+\lambda^2}{2} \\ y & \pm\sqrt{1-\left(\dfrac{1+\lambda^2}{2}\right)^2} \end{vmatrix} = 0 \text{ et } z = \lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in [-1,1],\ y\frac{3+\lambda^2}{2} = \pm x\sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2} \text{ et } z = \lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad z \in [-1,1],\ y^2\left(\frac{3+z^2}{2}\right)^2 = x^2\left(1-\left(\frac{1+z^2}{2}\right)^2\right)$$

Et :

$$y^2\left(\frac{3+z^2}{2}\right)^2 = x^2\left(1-\left(\frac{1+z^2}{2}\right)^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad y^2\left(\frac{3+z^2}{2}\right)^2 - x^2\left(\frac{3+z^2}{2}\right)\left(\frac{1-z^2}{2}\right) = 0.$$

Et comme pour tout $z \in [-1,1]$, $\dfrac{3+z^2}{2} \neq 0$, ceci équivaut à :

$$y^2\left(1+\frac{1+z^2}{2}\right) - x^2\left(1-\frac{1+z^2}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+y^2)z^2 = x^2 - 3y^2.$$

Donc, une équation cartésienne de la réunion des droites $D(\lambda)$ quand λ décrit $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{(x^2+y^2)z^2 = x^2 - 3y^2 \text{ avec } z \in [-1,1].}$$