Exercices d'entrainement - Corrigés des chapitres 9 à 16

Chapitre 9

1) a. Posons $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a alors $f: t \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k t^k X^k$ et comme toutes les applications polynomiales $t \mapsto a_k t^k$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f': t \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1} X^k = X \sum_{k=1}^{n} k a_k (tX)^{k-1} = X P'(tX)$.
Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } f': t \mapsto X P'(tX).}$$

b. L'application $L: M \mapsto MB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on a $f = L \circ A$. Comme $A: t \mapsto A(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $L \circ A'$, soit :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } f': t \mapsto A'(t)B.}$$

c. Notons $A(t) = \left(a_{i,j}(t)\right)_{1 \le i,j \le n}$ et $B(t) = \left(b_{i,j}(t)\right)_{1 \le i,j \le n}$. On a alors $A(t)B(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(t) b_{k,j}(t)\right)_{1 \le i,j \le n}$.

Comme A et B sont dérivables sur $\mathbb{R}$, toutes les applications $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ le sont aussi. Alors, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de produits de telles fonctions, de dérivé :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a'_{i,k}\, b_{k,j} + a_{i,k} b'_{k,j}\right).$$

Ainsi, *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\left(\sum_{k=1}^{n} \left(a'_{i,k}\, b_{k,j} + a_{i,k} b'_{k,j}\right)\right)_{1 \le i,j \le n}$, soit :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } f': t \mapsto A'(t)B(t) + A(t)B'(t).}$$

d. En conservant les notations précédentes, on a $f: t \mapsto Tr\left(A(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions, de dérivé $f': t \mapsto \sum_{i=1}^{n} a'_{i,i}(t)$, soit :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } f': t \mapsto Tr\left(A'(t)\right).}$$

Remarque : On pouvait aussi dire que $f = Tr \circ A$ et, comme la trace est linéaire, *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivé $f' = Tr \circ A'$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \ln(1+xt)$ est bien définie et continue sur $[0,x]$, donc $F(x) = \int_0^x \ln(1+xt)\,dt$ est bien défini et $F(0)=0$. Soit alors $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Tel qu'indiqué posons $u = xt$ ($t \mapsto xt$ est bijective et C^1 de $[0,x]$ dans $[0,x^2]$). On obtient :

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^{x^2} \ln(1+u)\,du = \frac{1}{x}\big[(1+u)\ln(1+u) - u\big]_0^1 = \frac{(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2}{x}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} + x\ln(1+x^2) - x.$$

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de telles fonctions et on a $F(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$. Alors, comme la fonction F admet un DL d'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0. Finalement :

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+.}$$

3) On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec :

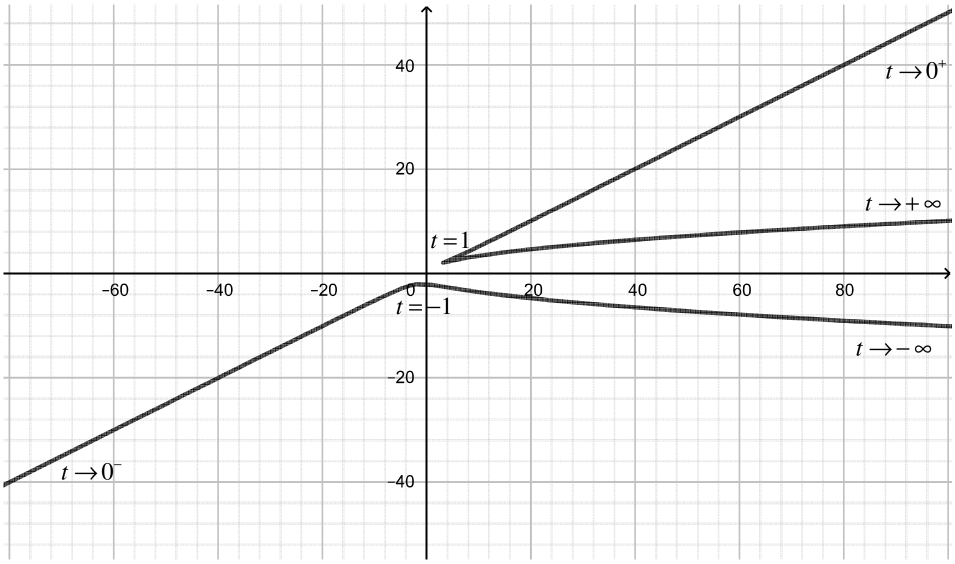
$$f' : t \mapsto \begin{cases} x'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^2} = 2\dfrac{(t-1)(t^2+t+1)}{t^2} \\[2ex] y(t) = \dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2} \end{cases}$$

On obtient le tableau :

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	-4	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- On a $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, donc $\mathscr{C}_f$ admet une direction asymptotique horizontale quand $t \to \pm\infty$.
- On a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t\to 0}\left[y(t) - \dfrac{1}{2}x(t)\right] = 0$, donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ en $t \to 0$.
- On a $f(1+h) - f(1) = h^2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - h^3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \underset{h\to 0}{o}(h^3)$, et comme $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, le point stationnaire de $\mathscr{C}_f$ est un point de rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce ($p=2, q=3$).

On obtient la courbe :



On note $\mathscr{C}_g$ la courbe de g. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques (toute la courbe est obtenue quand t décrit un segment de longueur 2π), respectivement paire et impaire (la courbe est symétrique par rapport à (Ox)) et vérifient $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$ pour tout t (la courbe est symétrique par rapport à (Oy)). On étudie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

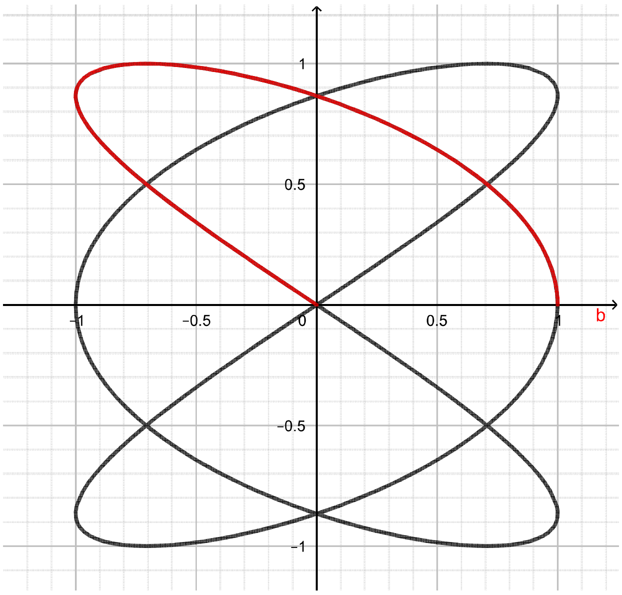
$$g' : t \mapsto \begin{cases} x'(t) = -3\sin(3t) \\ y'(t) = 2\cos(2t) \end{cases}$$

On obtient le tableau :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-$	0	$+$	3
x	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	2	$+$	0	$-$	-1	$-$	-2

On a $f(1+h) - f(1) = h^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - h^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underset{h \to 0}{o}(h^3)$, et comme $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, le point stationnaire de $\mathscr{C}_g$ est un point de rebroussement de 1$^{\text{ère}}$ espèce ($p = 2, q = 3$).

On obtient la courbe (la partie en rouge est celle correspondant à $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) :



On note $\mathscr{C}_c$ la courbe de c. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout t, $x(t+2\pi) = 2\pi a + x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$, donc la courbe entière est obtenue par translation de vecteur $(2\pi ak, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ de la partie obtenue quand t décrit $[-\pi, \pi]$). De plus, les fonctions x et y sont respectivement impaire et paire : la courbe est symétrique par rapport à (Oy) et on peut étudier sur $[0, \pi]$.

La fonction c est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

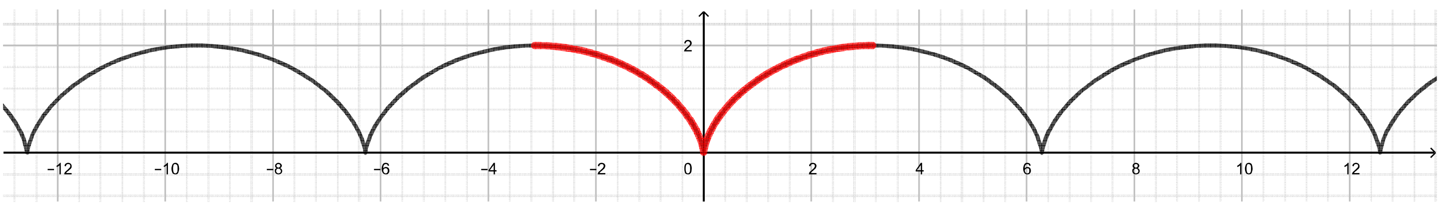
$$c' : t \mapsto \begin{cases} x'(t) = a(1-\cos t) \\ y'(t) = a\sin t \end{cases} \quad c : t \mapsto \begin{cases} x(t) = a(t-\sin t) \\ y(t) = a(1-\cos t) \end{cases}$$

On obtient le tableau :

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	$2a$
x	0	$\nearrow$	πa
y	0	$\nearrow$	$2a$
$y'(t)$	0	$+$	0

On a $c(t) - c(0) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac{a}{6}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \underset{t\to 0}{o}(t^3)$, et comme $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, le point stationnaire de $\mathscr{C}_c$ est un point de rebroussement de 1[ère] espèce ($p = 2, q = 3$).

On obtient la courbe pour $a = 1$ (la partie en rouge est celle correspondant à $t \in [-\pi, \pi]$) :



La longueur L d'une arche de $\mathscr{C}_c$ est donnée par :

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \|c'(t)\| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = a\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} dt = a\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1-\cos t)} dt$$

$$= 2a\int_{0}^{\pi} \sqrt{2(1-\cos t)} dt = 4a\int_{0}^{\pi} \sin\frac{t}{2} dt = 8a$$

Donc :

$$\boxed{\text{La longueur d'une arche de } \mathscr{C}_c \text{ est } 8a.}$$

Chapitre 10

1) Pour tous réels a et b, la fonction $t \mapsto \sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ de plus :

$$\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2} = \sqrt{t}\left(1 + a\sqrt{1+\frac{1}{t}} + b\sqrt{1+\frac{2}{t}}\right) = \sqrt{t}\left(1 + a\left(1+\frac{1}{2t}\right) + b\left(1+\frac{1}{t}\right) + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$$

$$= \sqrt{t}\left(1 + a + b + \frac{a+2b}{2t} + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) = (1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$$

Donc, $\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2} - (1+a+b)\sqrt{t} + \dfrac{a+2b}{2\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t\sqrt{t}}\right)$ et comme $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ converge :

$$\int^{+\infty}\left[\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2} - (1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}}\right]dt \text{ converge.}$$

Alors :

$$I = \int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}\right)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int^{+\infty}\left[(1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}}\right]dt \text{ converge}.$$

Or, si $1+a+b \neq 0$, on a $(1+a+b)\sqrt{t} + \dfrac{a+2b}{2\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} (1+a+b)\sqrt{t}$ donc $\displaystyle\int^{+\infty}\left[(1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}}\right]dt$ diverge et si $1+a+b=0$ et $a+2b \neq 0$, $\displaystyle\int^{+\infty}\left[(1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}}\right]dt = \int^{+\infty}\frac{a+2b}{2\sqrt{t}}dt$ diverge, donc :

$$\int^{+\infty}\left[(1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}}\right]dt \text{ converge } \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a+b=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}\right)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}}$$

Dans ce cas, on a :

$$I = \int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t+2}\right)dt = \frac{2}{3}\Big[t\sqrt{t} - 2(t+1)\sqrt{t+1} + (t+2)\sqrt{t+2}\Big]_0^{+\infty}.$$

$$= \frac{2}{3}\left(\lim_{t\to+\infty}\left[t\sqrt{t} - 2(t+1)\sqrt{t+1} + (t+2)\sqrt{t+2}\right] - \left[-2 + 2\sqrt{2}\right]\right)$$

Et :

$$t\sqrt{t} - 2(t+1)\sqrt{t+1} + (t+2)\sqrt{t+2} = t\sqrt{t}\left[1 - 2\left(1+\frac{1}{t}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t}} + \left(1+\frac{2}{t}\right)\sqrt{1+\frac{2}{t}}\right]$$

$$= t\sqrt{t}\left[1 - 2\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{2t} + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) + \left(1+\frac{2}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t} + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)\right]$$

$$= \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left[t\sqrt{t} - 2(t+1)\sqrt{t+1} + (t+2)\sqrt{t+2}\right] = 0$ et ainsi :

$$\boxed{I = \frac{4(1-\sqrt{2})}{3}}$$

2) La fonction $t \mapsto 1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus :

- $\lim\limits_{t\to 0^+}\left[1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right] = 1$ donc $\int_0 \left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$ converge ;
- $\arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^3}\right)$, donc $1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3t^2}$ et comme $\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, $\int^{+\infty} \left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$ converge aussi.

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt \text{ converge.}}$$

Les fonctions $t \mapsto \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ et $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tous $a, x \in \mathbb{R}_+^*$, on en intégrant par parties :

$$\int_a^x t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^x - \int_a^x \frac{t^2}{2}\frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}dt = \left[\frac{t^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^x + \frac{1}{2}\int_a^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^x + \frac{1}{2}\int_a^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}t - \arctan t\right]_a^x$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}x - \arctan x - \frac{a^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2}a + \arctan a$$

Quand $a \to 0^+$, on obtient :

$$\int_0^x t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt = \frac{x^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}x - \arctan x.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_0^x \left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt = x - \frac{x^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}x + \arctan x = \frac{1}{2}x\left[1 - x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \arctan x.$$

Or, on a vu que $1 - x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3x^2}$, donc $x\left[1 - x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3x}$ et $x\left[1 - x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt = \frac{\pi}{2}}$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^a \ln(x+e^{ax})$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^a \ln(x+e^{ax})\,dx$ est impropre en 0 et + ∞.

- En 0, on a $x^a \ln(x+e^{ax}) = x^a \ln\left(x+1+ax+\underset{x\to 0}{o}(x)\right) = x^a \ln\left(1+(a+1)x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)$.
  - Si $a+1 \neq 0$, on a $x^a \ln(x+e^{ax}) \underset{x\to 0}{\sim} (a+1)x^{a+1}$ et $\int_0 x^a \ln(x+e^{ax})\,dx$ converge si et seulement si $a+2>0$.
  - Si $a+1=0$, on a $x^a \ln(x+e^{ax}) = \frac{1}{x}\ln(x+e^{-x}) = \frac{1}{x}\ln\left(1+\underset{x\to 0}{o}(x)\right) = \frac{1}{x}\underset{x\to 0}{o}(x) = \underset{x\to 0}{o}(1)$, donc la fonction admet une limite finie en 0 et $\int_0 x^a \ln(x+e^{ax})\,dx$ converge.

  Ainsi, $\int_0 x^a \ln(x+e^{ax})\,dx$ converge si et seulement si $a > -2$.

- En + ∞, on a :
  - Si $a=0$, on a $x^a \ln(x+e^{ax}) = \ln(x+1)$ et $\int^{+\infty} x^a \ln(x+e^{ax})\,dx$ diverge.
  - Si $a>0$, on a $x^a \ln(x+e^{ax}) \underset{x\to+\infty}{\sim} ax^{a+1}$ et $\int^{+\infty} x^{a+1}dx$ diverge, donc $\int^{+\infty} x^a \ln(x+e^{ax})\,dx$ diverge.
  - Si $a<0$, on a $x^a \ln(x+e^{ax}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^{|a|}}$ et $\int^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{|a|}}dx$ converge si et seulement si $|a|>1$, car :
    - si $|a|>1$, alors $\frac{\ln x}{x^{|a|}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{\frac{1+|a|}{2}}}\right)$ et $\frac{1+|a|}{2}>1$, donc $\int^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1+|a|}{2}}}dx$;
    - si $|a|\leq 1$, alors $\frac{1}{x^{|a|}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln x}{x^{|a|}}\right)$ et $|a|\leq 1$, donc $\int^{+\infty} \frac{1}{x^{|a|}}dx$.

  Ainsi, $\int^{+\infty} x^a \ln(x+e^{ax})\,dx$ converge si et seulement si $a < -1$.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} x^a \ln(x+e^{ax})\,dx \text{ converge si et seulement si } -2<a<-1.}$$

4) Posons $g(t) = \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et si G est une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = G(2x) - G(x).$$

Comme G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, f est une différence de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2\frac{e^{-\sqrt{2x}}}{2x} - \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^{-\sqrt{2x}} - e^{-\sqrt{x}}}{x}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de dérivée } f' : x \mapsto \frac{e^{-\sqrt{2x}} - e^{-\sqrt{x}}}{x}.}$$

Posons $h(t)=\dfrac{e^{-\sqrt{t}}-1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $h(t)\underset{t\to 0}{\sim}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\int_0 \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$ converge, donc :

$$\int_x^{2x} h(t)dt=\int_0^{2x} h(t)dt-\int_0^{x} h(t)dt \xrightarrow[x\to 0]{} 0 .$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt=\int_x^{2x}\left(h(t)+\frac{1}{t}\right)dt=\int_x^{2x}h(t)\,dt+\int_x^{2x}\frac{dt}{t}=\int_x^{2x}h(t)\,dt+\ln 2 .$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=\ln 2}$$

On a $\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt$ converge. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt=\int_1^{2x}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt-\int_1^{x}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt .$$

Et donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt-\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt$, soit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$$

Remarquons que g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $x<2x$, donc f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ revient à montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Cette intégrale est impropre en 0 et + ∞, mais comme f admet une limite finie en 0, $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

Par ailleurs, les fonctions f et $x\mapsto x$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et en intégrant par parties, on a pour tout réel $X\geq 1$:

$$\int_1^X f(x)\,dx=\left[x f(x)\right]_1^X-\int_1^X x f'(x)\,dx=X f(X)-f(1)-\int_1^X\left(e^{-\sqrt{2x}}-e^{-\sqrt{x}}\right)dx .$$

Or, $e^{-\sqrt{2x}}-e^{-\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc $\int_1^{+\infty}\left(e^{-\sqrt{2x}}-e^{-\sqrt{x}}\right)dx$ converge.

Par ailleurs, $g(t)=\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$, donc il existe un réel $A>0$ tel que pour tout réel $t\geq A$, on a $\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\leq\dfrac{1}{t^3}$.

Alors, pour tout réel $X\geq A$, on a (avec $x<2x$) :

$$0\leq X f(X)=X\int_X^{2X}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt\leq X\int_X^{2X}\frac{1}{t^3}dt=X\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_X^{2X}=\frac{3}{8X} .$$

Avec le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{X\to+\infty} X f(X)=0$ et ainsi $\int_1^X f(x)\,dx$ admet une limite finie quand $X\to+\infty$, autrement dit $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Finalement $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

5) La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{x^2+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout réel *x*. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\dfrac{\ln t}{x^2+t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{1,5}}\right)$ et $\int^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{1,5}}$ converge, donc $\int^{+\infty} \dfrac{\ln t}{x^2+t^2}\,dt$ converge ;
- si $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\ln t}{x^2+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\ln t}{x^2}$ et $\int_0 \ln t\,dt$ converge, donc $\int_0 \dfrac{\ln t}{x^2+t^2}\,dt$ converge ;
- $\dfrac{1}{t} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{\ln t}{t^2}\right)$ et $\int_0 \dfrac{dt}{t}$ diverge donc $\int_0 \dfrac{\ln t}{t^2}\,dt$ diverge.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}\,dt \text{ définie sur } D = \mathbb{R}^*.}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, donc dans $F(1) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\ln t}{1+t^2}\,dt$, on peut poser le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, ce qui donne :

$$F(1) = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\,du\right) = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln u}{u^2+1}\,du = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1}\,du = -F(1).$$

Et donc :

$$\boxed{F(1) = 0}$$

Remarquons que *F* est paire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{x}$ est de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, donc dans $F(x)$, on peut poser le changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$, ce qui donne :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2+u^2x^2}\,x\,du = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u + \ln x}{1+u^2}\,du.$$

Et comme les deux intégrales convergent, on a :

$$F(x) = \frac{1}{x}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\,du + \ln x \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}\right] = \frac{1}{x}F(1) + \frac{\ln x}{x}\left[\arctan u\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}.$$

Ainsi, par imparité, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\boxed{F(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\ln|x|}{|x|}}$$

Chapitre 11

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{1+nt+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (comme quotient de telles fonctions).
- Comme pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a $|f_n(t)|\le \dfrac{1}{1+nt}$ et $\dfrac{1}{1+nt}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle, qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$, $|f_n(t)|\le\dfrac{1}{1+t^2}$ et la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de convergence dominée, on peut alors conclure que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ f_n \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 0.}$$

2) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Pour $x=0$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} x^2e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty}0=0$ et pour $x>0$, on a $0<e^{-x}<1$ et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx} = x^2\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-x})^n = x^2\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{x^2}{e^x-1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx} = \begin{cases} 0 & \text{pour } x=0 \\ \dfrac{x^2}{e^x-1} & \text{pour } x\in\mathbb{R}_+^* \end{cases}}$$

Remarquons que $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{e^x-1} = \lim_{x\to0} x\dfrac{x}{e^x-1} = 0\times1=0$.

La fonction $x\mapsto\dfrac{x^2}{e^x-1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Comme ci-dessus, on a $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{e^x-1}=0$, donc $\int_0 \dfrac{x^2}{e^x-1}dx$ converge.
- On a $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{e^x}=0$ par croissances comparées, donc $\dfrac{x^2}{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, et comme $\int^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ converge, $\int^{+\infty}\dfrac{x^2}{e^x-1}dx$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'intégrale } J=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx \text{ existe bien.}}$$

On a :

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}\right)dx.$$

Or :

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x\mapsto x^2e^{-nx}$ est continue (produit), donc continue par morceaux, et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car $x^2e^{-nx}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^2}\right)$) ;
- pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}=\frac{x^2}{1-e^{-x}}$ et la fonction $x\mapsto\frac{x^2}{1-e^{-x}}$ est continue (quotient), donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, une double intégration par parties entre 0 et $X>0$, puis un passage à la limite que $X\to+\infty$, donne $\int_0^{+\infty}\left|x^2e^{-nx}\right|dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-nx}dx=\frac{2}{n}\int_0^{+\infty}xe^{-nx}dx=\frac{2}{n^2}\int_0^{+\infty}e^{-nx}dx=\frac{2}{n^3}$ et la série $\sum\frac{2}{n^3}$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme donne alors :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}\right)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^2e^{-nx}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}.$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{J=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}}$$

3) On a $x^x=e^{x\ln x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}$ pour tout $x\in\left]0,1\right]$, et $\lim_{x\to0}x^x=\lim_{x\to0}e^{x\ln x}=e^0=1$.

Posons $f_0:x\mapsto1$ sur $[0,1]$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$f_n:x\mapsto\begin{cases}\dfrac{(x\ln x)^n}{n!} & \text{quand } x\in\left]0,1\right]\\ 0 & \text{quand } x=0\end{cases}$$

Comme $\lim_{x\to0}x\ln x=0$, les fonctions f_n sont continues en 0 et elles le sont aussi sur $\left]0,1\right]$ comme produits de telles fonctions. De plus, une étude rapide de $x\mapsto x\ln x$ sur $\left]0,1\right]$, montre que $\max_{x\in\left]0,1\right]}|x\ln x|=\frac{1}{e}$ et donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\max_{[0,1]}|f_n|=\frac{(1/e)^n}{n!}$. Comme la série $\sum\frac{(1/e)^n}{n!}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

On a alors toutes les hypothèses pour intervertir somme et intégrale :

$$\int_0^1x^xdx=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1f_n(x)\,dx.$$

On a $\int_0^1f_0(x)\,dx=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1f_n(x)\,dx=\int_0^1\frac{(x\ln x)^n}{n!}dx=\frac{1}{n!}\int_0^1x^n(\ln x)^n\,dx$.

Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ et $x \mapsto (\ln x)^n$ sont de classe C^1 sur $]0,1]$, donc pour tout $a \in]0,1]$, on peut intégrer par parties entre a et 1, ce qui donne :

$$\int_a^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^n\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(n\frac{1}{x}(\ln x)^{n-1}\right)dx.$$

Et comme $\lim\limits_{x\to 0} x^{n+1}(\ln x)^n = 0$, on peut écrire :

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = -\frac{n}{n+1}\int_a^1 x^n (\ln x)^{n-1} dx.$$

En recommençant, on obtient $\displaystyle\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \left(-\frac{n}{n+1}\right)\left(-\frac{n-1}{n+1}\right)\int_0^1 x^n (\ln x)^{n-2} dx$ et une récurrence finie sur k permet de prouver que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \left(-\frac{n}{n+1}\right)\left(-\frac{n-1}{n+1}\right)\ldots\left(-\frac{n-k+1}{n+1}\right)\int_0^1 x^n (\ln x)^{n-k} dx.$$

En particulier pour $k = n$, on obtient :

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \left(-\frac{n}{n+1}\right)\left(-\frac{n-1}{n+1}\right)\ldots\left(-\frac{1}{n+1}\right)\int_0^1 x^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Alors :

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Et en réindexant, on obtient :

$$\boxed{\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}}$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que quotient de telles fonctions et :

- si $x \geq 0$, on a $0 < \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ converge (car $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ converge) ;
- si $x < 0$, on a $t\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, donc $\dfrac{1}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}\right)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ diverge (car $\displaystyle\int^{+\infty}\frac{dt}{t}$ diverge).

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+.}$$

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$0 \leq f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \left[\frac{1}{-x}e^{-xt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Avec le théorème des gendarmes, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

La fonction $g:(x,t)\mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, on a $0<g(x,t)\leq\dfrac{1}{1+t^2}$ et la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors :

$$\boxed{f:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

Soit $a>0$.

- Pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, avec $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-t\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$.
- Pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+$, on ait $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq e^{-at}$ (car $\dfrac{t}{1+t^2}\leq 1$) et la fonction $t\mapsto e^{-at}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors :

$$\boxed{\text{La fonction } f:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a,+\infty[\text{ pour tout réel } a>0.}$$

Comme $\mathbb{R}_+^*=\bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*}[a,+\infty[$ et f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ pour tout réel $a>0$:

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Comme, pour tout réel $a>0$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$, avec $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)=t^2\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$, on montre comme pour la classe C^1 que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'':x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$.

On a alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x)+f(x)=\int_0^{+\infty}t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est solution de } y''+y=\frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

5) La fonction $t \mapsto \dfrac{t^x - 1}{1+t}$ est définie et continue sur $]0,1]$ en tant que quotient de telles fonctions.

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$ converge, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x-1}{1+t}dt$ converge si et seulement si c'est le cas de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$. Or, $\dfrac{t^x}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} t^x$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 t^x dt$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $x > -1$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x-1}{1+t}dt \text{ est définie sur }]-1,+\infty[.}$$

Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $x+1>0$ (donc $x+1 \in]-1,+\infty[$) et :

$$f(x+1)+f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x+1}-1}{1+t}dt + \int_0^1 \frac{t^x-1}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^{x+1}+t^x-2}{1+t}dt = \int_0^1 \left(t^x - \frac{2}{1+t}\right)dt = \left[\frac{1}{x+1}t^{x+1} - 2\ln(1+t)\right]_0^1.$$

Soit, pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$\boxed{f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x+1} - 2\ln 2}$$

- Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{t^x-1}{1+t}$ est continue, donc continue par morceaux sur $]0,1]$.
- Pour tout $t \in]0,1]$, $x \mapsto \dfrac{t^x-1}{1+t}$ est continue sur $]-1,+\infty[$.
- Pour tout $(x,t) \in]-1,+\infty[\times]0,1]$, on a $\left|\dfrac{t^x-1}{1+t}\right| \leq \dfrac{t^x+1}{1+t} \leq \dfrac{2}{1+t}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{2}{1+t}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$.

Alors, $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x-1}{1+t}dt$ est continue sur $]-1,+\infty[$ et en particulier en 0, donc :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x+1) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

Or, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2\ln 2 - f(x+1)$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to -1^+}{\sim} \frac{1}{x+1}.}$$

Pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x-1}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt - \ln 2.$$

Et :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}.$$

Le théorème des gendarmes donne alors $\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt = 0$ et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\ln 2 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln 2.}$$

6) Pour tout réel *x*, la fonction $g : t \mapsto \frac{(t-1)t^x}{\ln t}$ est définie et continue sur $]0,1[$ en tant que quotient de telles fonctions.

- <u>*En 0*</u> :
  - quand $x > -1$, on a $g(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(t^x\right)$ et $\int_0 t^x dt$ converge, donc $\int_0 g(t)dt$ converge ;
  - quand $x < -1$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{g(t)}{t^{\frac{x-1}{2}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t-1}{t^{-\frac{x+1}{2}}\ln t} = +\infty$ (car $-\frac{x+1}{2} > 0$ donc $\lim_{t\to 0^+} t^{-\frac{x+1}{2}}\ln t = 0^-$), donc $t^{\frac{x-1}{2}} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(g(t)\right)$ et $\int_0 t^{\frac{x-1}{2}} dt$ diverge (car $\frac{x-1}{2} < -1$), donc $\int_0 g(t)dt$ diverge ;
  - quand $x = -1$, $g(t) = \frac{t-1}{t\ln t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-1}{t\ln t}$ et $\int_0 \frac{1}{t\ln t}dt$ diverge (une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est $t \mapsto \ln\left|\ln t\right|$ qui diverge en 0), donc $\int_0 g(t)dt$ diverge.

  Ainsi, $\int_0 g(t)dt$ converge si et seulement si $x \in \left]-1,+\infty\right[$.

- <u>*En 1*</u> :

  On a $\lim_{t\to 1} g(t) = 1$, donc *g* est prolongeable par continuité en 1, et $\int^1 g(t)dt$ converge pour tout réel *x*.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto \int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ln t}dt \text{ est définie sur } \left]-1,+\infty\right[.}$$

Soit $g : (x,t) \mapsto \frac{(t-1)t^x}{\ln t} = \frac{t-1}{\ln t}e^{x\ln t}$ une fonction définie sur $\left]-1,+\infty\right[\times\left]0,1\right[$.

- Pour tout $x \in \left]-1,+\infty\right[$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur $]0,1[$ (on vient de le voir).
- Pour tout $t \in \left]0,1\right[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\left]-1,+\infty\right[$ avec $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (t-1)e^{x\ln t} = t^{x+1} - t^x$.
- Pour tout $x \in \left]-1,+\infty\right[$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\left]0,1\right[$.
- Pour tout $a \in \left]-1,+\infty\right[$ et pour tout $(x,t) \in \left[a,+\infty\right[\times\left]0,1\right[$, on a $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|t^{x+1} - t^x\right| \le t^{x+1} + t^x \le 1 + t^a$ et la fonction $t \mapsto 1 + t^a$ est positive, continue par morceaux et intégrable (car $a > -1$) sur $\left]0,1\right[$.

Alors, la fonction *f* est de classe C^1 sur $\left[a,+\infty\right[$, de dérivée $f' : x \mapsto \int_0^1 (t^{x+1} - t^x)\,dt$.

Ceci étant vrai pour tout $a \in \left]-1,+\infty\right[$ et avec $\bigcup_{a\in\left]-1,+\infty\right[}\left[a,+\infty\right[=\left]-1,+\infty\right[$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } D=\left]-1,+\infty\right[\text{, de dérivée } f':x\mapsto\int_0^1(t^{x+1}-t^x)\,dt.}$$

On vient de voir que, pour tout $x \in \left]-1,+\infty\right[$:

$$f'(x)=\int_0^1(t^{x+1}-t^x)\,dt=\left[\frac{1}{x+2}t^{x+2}-\frac{1}{x+1}t^{x+1}\right]_0^1=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}.$$

On a alors pour tout $x \in \left]-1,+\infty\right[$:

$$f(x)=\ln(x+2)-\ln(x+1)+K=\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)+K$$

avec $K\in\mathbb{R}$.

Remarquons que la fonction $t\mapsto\dfrac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $\left]0,1\right[$ avec $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t-1}{\ln t}=0$ et $\lim\limits_{t\to1^-}\dfrac{t-1}{\ln t}=1$. Donc, la fonction $t\mapsto\dfrac{t-1}{\ln t}$ est bornée sur $\left]0,1\right[$, et il existe une réel $M>0$ tel que pour tout $t\in\left]0,1\right[$, $\left|\dfrac{t-1}{\ln t}\right|\le M$.

Alors, pour tout $x\in\left]-1,+\infty\right[$, on a $\left|\dfrac{(t-1)t^x}{\ln t}\right|\le M\,t^x$ pour tout $t\in\left]0,1\right[$ et :

$$|f(x)|=\left|\int_0^1\frac{(t-1)t^x}{\ln t}dt\right|\le\int_0^1\left|\frac{(t-1)t^x}{\ln t}\right|dt\le\int_0^1 M\,t^x dt=\frac{M}{x+1}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{M}{x+1}=0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Or :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)+K\right]=K.$$

Ainsi, $K=0$ et finalement, pour tout $x\in\left]-1,+\infty\right[$:

$$\boxed{f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)}$$

Chapitres 12-13-14

1) On a :

- $k\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=a+k\left(\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}\right)$ qui, évalué en 0 donne $a=\dfrac{1}{2}$;
- $(k+1)\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{k(k+2)}=b+(k+1)\left(\dfrac{a}{k}+\dfrac{c}{k+2}\right)$ qui, évalué en – 1, donne $b=-1$;
- $(k+2)\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{k(k+1)}=c+(k+2)\left(\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}\right)$ qui, évalué en – 2, donne $c=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{½}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{½}{k+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)}$$

Si pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $P(X=k)=\dfrac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}$, alors, comme $\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)=1$, on a :

$$1=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}=\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)=\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right]=\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\alpha}{4}.$$

Donc :

$$\boxed{\alpha=4}$$

On a $kP(X=k)=\dfrac{4}{(k+1)(k+2)}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{4}{k^2}$ et $\sum\dfrac{4}{k^2}$ converge, donc $\sum kP(X=k)$ converge et X admet une espérance, donnée par :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(k+1)(k+2)}=4\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=4\frac{1}{2}.$$

Soit :

$$\boxed{E(X)=2}$$

On a $k^2P(X=k)=\dfrac{4k}{(k+1)(k+2)}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{4}{k}$ et $\sum\dfrac{4}{k}$ diverge, donc $\sum k^2P(X=k)$ diverge et :

$$\boxed{X \text{ n'admet pas de variance.}}$$

2) On veut la probabilité de A : « une personne au moins n'a pas le même résultat que les autres ».

On a $\overline{A}$ = « tout le monde a le même résultat ». Et si on note Pi = « tout le monde obtient pile » et Fa = « tout le monde obtient face », on a $\overline{A}=Pi\cup Fa$, l'union étant disjointe.

Il y a n personnes et les n lancers (simultanés) sont indépendants les uns des autres, donc $P(Pi)=P(Fa)=\dfrac{1}{2^n}$ et ainsi :

$$P(\overline{A})=P(Pi)+P(Fa)=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{La probabilité qu'une personne au moins n'ait pas le même résultat que les autres est } 1-\frac{1}{2^{n-1}}.}$$

L'expérience des n lancers simultanés a deux issues : A (une personne au moins n'a pas le même résultat que les autres) que nous noterons succès et $\overline{A}$ (tout le monde a le même résultat), l'échec. Si on répète cette expérience de manière indépendante une infinité de fois, le rang du premier succès (autrement dit le nombre de lancers nécessaires pour qu'au moins une personne n'ait pas le même résultat que les autres) est la variable X. Cette variable suit donc une loi géométrique de paramètre $P(A)=1-\frac{1}{2^{n-1}}$. Alors :

$$E(X)=\frac{1}{P(A)}=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1} \quad \text{et} \quad V(X)=\frac{1-P(A)}{P(A)^2}=\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}-1)^2}.$$

3) *C'est du cours* : $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $a+b$.

Avec les fonctions génératrices : $G_X(t)=e^{a(t-1)}$ et $G_Y(t)=e^{b(t-1)}$, et comme X et Y sont indépendantes :

$$G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t)=e^{a(t-1)}e^{b(t-1)}=e^{(a+b)(t-1)}.$$

Donc, $X+Y \hookrightarrow \mathscr{P}(a+b)$.

Comme X et Y sont indépendantes, X et $-Y$ le sont aussi, et $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)=0$, donc :

$$\begin{aligned}
\sigma(U) &= \sqrt{V(U)}=\sqrt{V(X+Y)}=\sqrt{V(X)+V(Y)}=\sqrt{a+b}\\
\sigma(V) &= \sqrt{V(V)}=\sqrt{V(X-Y)}=\sqrt{V(X)+V(-Y)}=\sqrt{V(X)+V(Y)}=\sqrt{a+b}\\
Cov(U,V) &= Cov(X+Y,X-Y)\\
&= Cov(X,X)+Cov(Y,X)-Cov(X,Y)-Cov(Y,Y)\\
&= V(X)-V(Y)=a-b
\end{aligned}$$

Alors :

$$\boxed{\frac{Cov(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)}=\frac{a-b}{a+b}}$$

4) L'expérience est : on tire simultanément deux cartes (distinctes) dans un jeu de 52. L'ordre ne compte pas, il y a $\binom{52}{2}=\frac{52\times 51}{2}$ couples possibles et tous les couples sont équiprobables, donc on peut utiliser la formule :

$$proba=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1,13]\!]$. Soit $(a,b)\in[\![1,13]\!]^2$. Pour évaluer $P\left(X=a,Y=b\right)$, considérons trois cas.

- Si $a>b$, on a :

$$P\left(X=a,Y=b\right)=0.$$

- Si $a=b$, les deux cartes tirées ont le même niveau ; il y a 4 cartes pour ce niveau *a*, donc le nombre de cas favorables est $\binom{4}{2}=6$ et on a :

$$P(X=a,Y=b)=P(X=Y=a)=\frac{6}{\frac{52\times 51}{2}}=\frac{1}{221}.$$

- Si $a<b$, il y a 4 cartes pour le niveau *a* et 4 pour le niveau *b*, donc le nombre de cas favorables est 4×4 et on a :

$$P(X=a,Y=b)=\frac{4\times 4}{\frac{52\times 51}{2}}=\frac{8}{663}.$$

Donc, pour tout $(a,b)\in [\![1,13]\!]^2$:

$$\boxed{P(X=a,Y=b)=\begin{cases}\frac{1}{221} & \text{quand } a=b\\ 0 & \text{quand } a>b\\ \frac{8}{663} & \text{quand } a<b\end{cases}}$$

Vérifions :

$$\sum_{(a,b)\in[\![1,13]\!]^2} P(X=a,Y=b)=\sum_{a=1}^{13}P(X=Y=a)+\sum_{1\le a<b\le 13}P(X=a,Y=b)=\sum_{a=1}^{13}P(X=Y=a)+\sum_{a=1}^{12}\sum_{b=a+1}^{13}P(X=a,Y=b)$$

$$=\sum_{a=1}^{13}\frac{1}{221}+\sum_{a=1}^{12}\sum_{b=a+1}^{13}\frac{8}{663}=\frac{13}{221}+\sum_{a=1}^{12}\frac{8(13-a)}{663}=\frac{13}{17\times 13}+\frac{8}{17\times 13\times 3}\frac{12\times 13}{2}=\frac{1}{17}+\frac{16}{17}=1$$

Soit $k\in[\![1,13]\!]$. On a :

$$P(X=k)=\sum_{b=1}^{13}P(X=k,Y=b)=\sum_{b=1}^{k-1}P(X=k,Y=b)+P(X=Y=k)+\sum_{b=k+1}^{13}P(X=k,Y=b)$$

$$=\frac{1}{221}+\sum_{b=k+1}^{13}\frac{8}{663}=\frac{1}{221}+\frac{8}{663}(13-k)=\frac{107-8k}{663}$$

$$P(Y=k)=\sum_{a=1}^{13}P(X=a,Y=k)=\sum_{a=1}^{k-1}P(X=a,Y=k)+P(X=Y=k)+\sum_{a=k+1}^{13}P(X=a,Y=k)$$

$$=\sum_{a=1}^{k-1}\frac{8}{663}+\frac{1}{221}=\frac{8}{663}(k-1)+\frac{1}{221}=\frac{8k-5}{663}$$

Donc, pour tout $k\in[\![1,13]\!]$:

$$\boxed{P(X=k)=\frac{107-8k}{663}\qquad P(Y=k)=\frac{8k-5}{663}}$$

On a $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ et :

$$E(XY)=\sum_{(a,b)\in[\![1,13]\!]^2} abP\left(X=a,Y=b\right)=\sum_{a=1}^{13} a^2P\left(X=Y=a\right)+\sum_{1\le a<b\le 13} abP\left(X=a,Y=b\right)$$

$$=\frac{1}{221}\sum_{a=1}^{13}a^2+\frac{8}{663}\sum_{a=1}^{12}a\left(\sum_{b=a+1}^{13}b\right)=\frac{1}{221}\sum_{a=1}^{13}a^2+\frac{8}{663}\sum_{a=1}^{12}a(13-a)\frac{a+1+13}{2}$$

$$=\frac{1}{221}\frac{13\times 14\times 27}{6}+\frac{4}{663}\sum_{a=1}^{12}a(13-a)(a+14)=\frac{2485}{51}$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{13}kP\left(X=k\right)=\sum_{k=1}^{13}k\frac{107-8k}{663}=\frac{35\times 7}{51}\qquad E(Y)=\sum_{k=1}^{13}kP\left(Y=k\right)=\sum_{k=1}^{13}k\frac{8k-5}{663}=\frac{67\times 7}{51}$$

Donc :

$$\boxed{Cov(X,Y)=\frac{2485}{51}-\frac{35\times 7}{51}\frac{67\times 7}{51}=\frac{11830}{2601}}$$

5) Dans tous les cas, les évènements $\left(X_n=k\right)$ et $\left(X_{n'}=k'\right)$, avec $n,n'\in\mathbb{N}^*$ et $k,k'\in\{0,1\}$, sont indépendants.

a. On a $\left(T=1\right)=\left(X_1=1\right)\cap\left(X_2=1\right)$, donc $P\left(T=1\right)=P\left(X_1=1\right)\times P\left(X_2=1\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, soit :

$$\boxed{P\left(T=1\right)=\frac{1}{4}}$$

Et $\left(T=2\right)=\left(X_1=0\right)\cap\left(X_2=1\right)\cap\left(X_3=1\right)$, donc $P\left(T=2\right)=P\left(X_1=0\right)\times P\left(X_2=1\right)\times P\left(X_3=1\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, soit :

$$\boxed{P\left(T=2\right)=\frac{1}{8}}$$

b. Remarquons que $A_n\cap B_n=\varnothing$ et $A_n\cup B_n$ = « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages ». On a :

A_{n+1} = « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des $n+1$ premiers tirages et $X_{n+1}=0$ »

= « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_{n+1}=0$ »

= $\left(A_n\cup B_n\right)\cap\left(X_{n+1}=0\right)$

En effet, si $X_{n+1}=0$, on n'a pas deux 1 consécutifs aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ tirages.

Comme A_n et B_n, donc $A_n\cup B_n$, ne concernent que les n premiers tirages, $A_n\cup B_n$ et $\left(X_{n+1}=0\right)$ sont indépendants, donc :

$$p_{n+1}=P(A_{n+1})=P\left(A_n\cup B_n\right)\times P\left(X_{n+1}=0\right)=\left[P\left(A_n\right)+P\left(B_n\right)\right]\times P\left(X_{n+1}=0\right)=\frac{1}{2}\left(p_n+q_n\right).$$

On a aussi :

B_{n+1} = « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des $n+1$ premiers tirages et $X_{n+1}=1$ »

= « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n=0$ et $X_{n+1}=1$ »

$= A_n \cap (X_{n+1} = 0)$

En effet, si $X_{n+1} = 1$ et on n'a pas deux 1 consécutifs aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ tirages, alors forcément $X_n = 0$.

Alors, toujours avec A_n et $(X_{n+1} = 0)$ indépendants :

$$q_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2} p_n .$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n + q_n)$ et $q_{n+1} = \frac{1}{2} p_n$, soit :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

On prouve alors par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$, avec :

$$\begin{cases} p_2 = P(A_2) = P(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \\ q_2 = P(B_2) = P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Si on pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_M = X^2 - X - 1$ de racines $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (distinctes), donc M est diagonalisable et on obtient $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -1 & a \end{pmatrix}$.

Ceci donne $M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} a^{n+1} - b^{n+1} & ab(b^n - a^n) \\ a^n - b^n & ab(b^{n-1} - a^{n-1}) \end{pmatrix}$ et donc :

$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{a-b} \left((2-b)a^{n-1} + (a-2)b^{n-1} \right) \\ q_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{a-b} \left((2-b)a^{n-2} + (a-2)b^{n-2} \right) \end{cases}$$

Or, $a - b = -\sqrt{5}$ et $a + b = 1$, donc $2 - b = 1 + a = a^2$ et $2 - a = b + 1 = b^2$ (car a et b sont racines de $X^2 - X - 1$).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\begin{cases} p_n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{2^n \sqrt{5}} \\ q_n = \dfrac{b^n - a^n}{2^n \sqrt{5}} \end{cases} \text{ avec } a = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

On a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$(T = n)$ = « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des $n+1$ premiers tirages et $X_n = 1$ et $X_{n+1} = 1$ »

$= B_n \cap (X_{n+1} = 1)$

Donc :

$$P(T = n) = P(B_n) \times P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} q_n .$$

Si on pose $u_n = 2^{n+1}P(T=n)$, on obtient :

$$u_n = 2^n q_n = \frac{b^n - a^n}{\sqrt{5}}.$$

On a bien $u_1 = \frac{b-a}{\sqrt{5}} = 1 = F_1$ et $u_2 = \frac{b^2-a^2}{\sqrt{5}} = \frac{(b-a)(b+a)}{\sqrt{5}} = 1 = F_0 + F_1 = F_2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n + u_{n+1} = \frac{b^n - a^n}{\sqrt{5}} + \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{(1+b)b^n - (1+a)a^n}{\sqrt{5}} = \frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{\sqrt{5}} = u_{n+2}.$$

Donc, $u_n = F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où :

$$\boxed{P(T=n) = \frac{F_n}{2^{n+1}}}$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = \frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)}.$$

Soit :

$$\boxed{P(X>n) = (1-p)^n}$$

On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, avec *X* et *Y* indépendantes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
P\left(Z=n\right) &= P\left(X=n, Y=n\right) + P\left(X>n, Y=n\right) + P\left(X=n, Y>n\right) \\
&= P\left(X=n\right)P\left(Y=n\right) + P\left(X>n\right)P\left(Y=n\right) + P\left(X=n\right)P\left(Y>n\right) \\
&= p(1-p)^{n-1}q(1-q)^{n-1} + (1-p)^n q(1-q)^{n-1} + p(1-p)^{n-1}(1-q)^n \\
&= \left[pq + (1-p)q + p(1-q)\right](1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1} \\
&= (p+q-pq)\left[(1-p)(1-q)\right]^{n-1}
\end{aligned}$$

En remarquant que $(1-p)(1-q) = 1-(p+q-pq)$ et en posant $r = p+q-pq$, on obtient $P\left(Z=n\right) = r(1-r)^{n-1}$ et ainsi :

$$\boxed{Z \text{ suit une loi géométrique de paramètre } r = p+q-pq.}$$

Alors :

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{p+q-pq}}$$

7) C'est du cours : *Loi faible des grands nombres*.

8) La première question est aussi du cours.

Si on note p la probabilité que X soit pair est :

$$p=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=2n)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}=e^{-\lambda}\operatorname{ch}\lambda=\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}.$$

On a alors $p-\frac{1}{2}=\frac{e^{-2\lambda}}{2}>0$, donc $p>\frac{1}{2}$ et donc :

Il vaut mieux parier que X est pair.

9) Le rang X d'apparition du premier pile suit une loi géométrique de paramètre p, donc si

On a alors :

$$P(A)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X=2n)=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2n-1}p=\frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(1-p)^2\right]^n=\frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2}.$$

Soit :

$$\boxed{P(A)=\frac{1-p}{2-p}}$$

De la même façon :

$$P(B)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X=3n)=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{3n-1}p=\frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(1-p)^3\right]^n=\frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^3}{1-(1-p)^3}.$$

Soit :

$$\boxed{P(A)=\frac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}}$$

On a :

$A\cap B$ = « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers pair et multiple de 3 »

= « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 6 ».

Donc :

$$P(A\cap B)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X=6n)=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{6n-1}p=\frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(1-p)^6\right]^n=\frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^6}{1-(1-p)^6}=\frac{p(1-p)^5}{1-(1-p)^6}.$$

Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, et :

$$\begin{aligned}
P(A\cap B)=P(A)P(B) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{p(1-p)^5}{1-(1-p)^6}=\frac{1-p}{2-p}\frac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}\\
&\Leftrightarrow \quad (1-p)^2(2-p)=1+(1-p)^3\\
&\Leftrightarrow \quad 2-5p+4p^2-p^3=2-3p+3p^2-p^3\\
&\Leftrightarrow \quad p^2=2p\\
&\Leftrightarrow \quad p=0 \text{ ou } p=2
\end{aligned}$$

Or, $p\in\left]0,1\right[$, donc $p\neq 0$ et $p\neq 2$, et ainsi :

Les évènements A et B ne sont pas indépendants.

10) Notons $D = \det M = (-1)^X - (-1)^Y$, on a :

Notons MI l'évènement « M est inversible ». On a :

$$MI = \left(D \neq 0\right) = (-1)^X \neq (-1)^Y = \text{« } X \text{ et } Y \text{ sont de parités différentes » = « } X+Y \text{ est impair ».}$$

Or, X et Y sont indépendantes et suivent toutes deux une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, donc $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \lambda = 2\lambda$. Alors :

$$P(MI) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(X+Y = 2n+1\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{-2\lambda}\,\mathrm{sh}\,(2\lambda) = \frac{1-e^{-4\lambda}}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité que } M \text{ soit inversible est } \frac{1-e^{-4\lambda}}{2}.}$$

On a $M(\Omega) = \left\{M_1, M_2, M_3, M_4\right\}$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et :

$$\chi_{M_1} = X\left(X-2\right),\ \chi_{M_2} = X^2,\ \chi_{M_3} = (X-1)^2 + 1,\ \chi_{M_4} = X^2 - 2.$$

Aucun de ces quatre polynômes caractéristiques n'admet 1 pour racine, donc :

$$\boxed{\text{La probabilité que } M \text{ admette 1 pour valeur propre est nulle.}}$$

Les polynômes caractéristiques de M_1 et M_4 sont scindés à racines simples dans $\mathbb{R}$, donc M_1 et M_4 sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

Le polynôme caractéristique de M_3 n'a pas de racine réelle, donc M_3 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais est scindé à racines simples ($1+i$ et $1-i$) dans $\mathbb{C}$ donc M_3 est diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

La seule racine de χ_{M_2} est 0, donc si M_2 était diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle. Ceci n'étant pas le cas, M_2 n'est diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$, ni sur $\mathbb{C}$.

Ainsi :

$$\text{« } M \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R} \text{ » } = \left(M = M_1\right) \cup \left(M = M_4\right).$$

$$\text{« } M \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C} \text{ » } = \left(M = M_1\right) \cup \left(M = M_3\right) \cup \left(M = M_4\right).$$

Alors :

$$\left(M = M_1\right) = X \text{ et } Y \text{ sont pairs}$$

$$\left(M = M_3\right) = X \text{ est pair et } Y \text{ est impair}$$

$$\left(M = M_4\right) = X \text{ est impair et } Y \text{ est pair}$$

Et, comme les variables X et Y sont indépendantes, on peut écrire :

$$P\left(M = M_1\right) = P(X \text{ et } Y \text{ sont pairs}) = P\left(X \text{ est pair}\right) P\left(Y \text{ est pair}\right)$$

$$P\left(M = M_3\right) = P\left(X \text{ est pair et } Y \text{ est impair}\right) = P\left(X \text{ est pair}\right) P\left(Y \text{ est impair}\right)$$

$$P\left(M = M_4\right) = P\left(X \text{ est impair et } Y \text{ est pair}\right) = P\left(X \text{ est impair}\right) P\left(Y \text{ est pair}\right)$$

Enfin :

$$P(X \text{ est pair}) = P(Y \text{ est pair}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda}\operatorname{ch}\lambda = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}$$

$$P(X \text{ est impair}) = P(Y \text{ est impair}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=2n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{-\lambda}\operatorname{sh}\lambda = \frac{1-e^{-2\lambda}}{2}$$

Donc :

$$P(M=M_1) = \left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)^2$$

$$P(M=M_3) = P(M=M_4) = \left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)\left(\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}\right)$$

Finalement :

La probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$ est $\left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)\left(\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}\right) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}$.

La probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$ est $\left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)\left(\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}\right) = \frac{(1+e^{-2\lambda})(3-e^{-2\lambda})}{4}$.

11) $\left(P(A_i)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est arithmétique, donc si R est sa raison, on a $P(A_i) = P(A_1)+(i-1)R$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

Et $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, soit :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\left[P(A_1)+(i-1)R\right] = nP(A_1) + R\sum_{i=1}^{n}(i-1) = n\frac{1}{2n} + R\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)R+1}{2}.$$

Donc, $\frac{n(n-1)R+1}{2} = 1$, ce qui donne $R = \frac{1}{n(n-1)}$ et ainsi, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$$\boxed{P(A_i) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{i-1}{n-1}\right)}$$

D'après la loi de probabilités totales ($(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'évènements), on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B\mid A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{i-1}{n-1}\right) = \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{2}+\frac{i(i-1)}{n-1}\right) = \frac{1}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}\right)\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

$$= \frac{1}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}\right)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n-1}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{n+1}{4n}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}+\frac{2n+1}{3(n-1)}\right]$$

Soit :

$$\boxed{P(B) = \frac{7(n+1)}{24n}}$$

12) C'est un exercice classique avec un nouvel habillage…

On a $N(\Omega)=\mathbb{N}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\in[\![0,n]\!]$, $P_{(N=n)}(K=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$P\left(K=k\right)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(N=n)P_{(N=n)}(K=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$=e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\left[\lambda(1-p)\right]^{n-k}}{(n-k)!}=e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left[\lambda(1-p)\right]^{n}}{n!}=e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}$$

Donc,

K suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

13) Les n lancers sont indépendants. Si p est la probabilité que le chiffre de A soit strictement supérieur à celui de B à l'issue d'un lancer, la variable X suit un loi binomiale de paramètres n et p.

Les deux dés étant discernables, il y a $6\times 6=36$ issues possibles quand on lance les dés A et B, donc 6 pour lesquelles le chiffre de A est égal à celui de B, 15 pour lesquelles le chiffre de A est strictement supérieur à celui de B et 15 pour lesquelles le chiffre de B est strictement supérieur à celui de A. Comme les 36 issues sont équiprobables, on a $p=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$. Ainsi :

La variable X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{5}{12}$, $E(X)=\frac{5}{12}n$ et $V(X)=\frac{35}{144}n$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, $P\left(\left|X-E(X)\right|\geq a\right)\leq\frac{V(X)}{a^2}$.

On a :

$$\begin{aligned}0,9\leq\frac{X}{E(X)}\leq 1,1 &\iff 0,9E(X)\leq X\leq 1,1E(X)\\ &\iff -0,1E(X)\leq X-E(X)\leq 0,1E(X)\\ &\iff \left|X-E(X)\right|\leq 0,1E(X)\end{aligned}$$

Donc :

$$p_n=P\left(0,9\leq\frac{X}{E(X)}\leq 1,1\right)=P\left(\left|X-E(X)\right|\leq 0,1E(X)\right).$$

Alors :

$$\begin{aligned}p_n\geq 0,99 &\iff P\left(\left|X-E(X)\right|\leq 0,1E(X)\right)\geq 0,99\\ &\iff 1-P\left(\left|X-E(X)\right|\leq 0,1E(X)\right)\leq 1-0,99\\ &\iff P\left(\left|X-E(X)\right|>0,1E(X)\right)\leq 0,01\end{aligned}$$

Or, on a $\left(\left|X-E(X)\right|=0,1E(X)\right)\subset\left(\left|X-E(X)\right|\geq 0,1E(X)\right)$, donc si $P\left(\left|X-E(X)\right|\geq 0,1E(X)\right)\leq 0,01$, alors $P\left(\left|X-E(X)\right|>0,1E(X)\right)\leq 0,01$ et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, avec $a=0,1E(X)>0$, on a :

$$P\left(\left|X-E(X)\right|\geq 0,1E(X)\right)\leq\frac{V(X)}{\left(0,1E(X)\right)^2}.$$

Et :

$$\frac{V(X)}{\left(0{,}1E(X)\right)^2}=\frac{\dfrac{35}{144}n}{\left(0{,}1\dfrac{5}{12}n\right)^2}=\frac{140}{n}.$$

Enfin, comme $\dfrac{140}{n}\leq 0{,}01$ pour $n\geq 14000$, on a :

$$\boxed{p_n\geq 0{,}99 \text{ pour } n\geq 14000 \text{ (au pire).}}$$

14) On a :

C_i = « le i-ème chasseur est touché » = $\left(X_i=1\right)$;

$\overline{C_i}$ = « le i-ème chasseur n'est pas touché » = $\left(X_i=0\right)$.

Les ℓ lapins touchent les chasseurs indépendamment avec une probabilité $p\in\left]0,1\right[$. Donc, la probabilité qu'un chasseur ne soit pas touché (les ℓ lapins ne touchent pas le chasseur) est $(1-p)^\ell$. C'est la même chose pour chaque chasseur, donc $P(\overline{C_i})=P\left(X_i=0\right)=(1-p)^\ell$ et ainsi :

$$\boxed{P(C_i)=P\left(X_i=1\right)=1-(1-p)^\ell}$$

On a $V=\sum_{i=1}^{c}X_i$. Les X_i (variables compteurs) sont indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^\ell$. Donc :

$$\boxed{V \text{ sui une loi binomiale de paramètres } c \text{ et } 1-(1-p)^\ell.}$$

Chapitre 15

1) Pour $f,g\in E=C^1([0,1],\mathbb{R})$, $f'g'$ est définie et continue sur $[0,1]$, donc $\varphi(f,g)$ est défini. Ainsi, φ est une application définie sur E^2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient $f,g,h\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a :

- $\varphi(f,g)=\varphi(g,f)$ par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, donc φ est *symétrique*.
- On a :

$$\begin{aligned}\varphi(f+\lambda h,g)&=[f(0)+\lambda h(0)]g(0)+[f(1)+\lambda h(1)]g(1)+\int_0^1[f'(t)+\lambda h'(t)]g'(t)\,dt\\&=f(0)g(0)+\lambda h(0)g(0)+f(1)g(1)+\lambda h(1)g(1)+\int_0^1[f'(t)g'(t)+\lambda h'(t)g'(t)]\,dt\\&=f(0)g(0)+f(1)g(1)+\lambda h(0)g(0)+\lambda h(1)g(1)+\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt+\lambda\int_0^1 h'(t)g'(t)\,dt\\&=f(0)g(0)+f(1)g(1)+\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt+\lambda\left[h(0)g(0)+h(1)g(1)+\int_0^1 h'(t)g'(t)\,dt\right]\\&=\varphi(f,g)+\lambda\varphi(h,g)\end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire à gauche, et par symétrie, φ est *bilinéaire*.
- $\varphi(f,f)=f(0)^2+f(1)^2+\int_0^1 f'(t)^2\,dt\geq 0$ donc φ est *positive*.
- Comme $f(0)^2$, $f(1)^2$ et $\int_0^1 f'(t)^2\,dt$ sont positifs, on a :

$$\varphi(f,f)=0 \quad\Leftrightarrow\quad f(0)^2=f(1)^2=\int_0^1 f'(t)^2\,dt=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}f(0)=f(1)=0\\ \int_0^1 f'(t)^2\,dt=0\end{cases}$$

  Or, comme *f* est C^1 sur $[0,1]$, f'^2 est continue et positive sur $[0,1]$, donc $\int_0^1 f'(t)^2\,dt=0$ entraine que f'^2, donc f', sont nulles sur $[0,1]$, ce qui veut dire que *f* est constante sur $[0,1]$. Comme $f(0)=0$, *f* est nulle sur $[0,1]$. Ainsi, φ est *définie*.

Finalement, $\varphi:E^2\to\mathbb{R}$ est bilinéaire, symétrique et définie positive, donc :

$$\boxed{\varphi \text{ définit un produit scalaire sur } E.}$$

2) On a $u=(1,0,1)$, $v=(1,1,1)$ et $w=(-1,1,0)$ dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique.

- $\|u\|=\sqrt{2}$, donc on pose : $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u$.
- On cherche $e_2=au+bv$ tel que $(e_2\mid u)=0$ et $\|e_2\|^2=(e_2\mid e_2)=1$, soit :

$$\begin{cases}(au+bv\mid u)=a\|u\|^2+b(v\mid u)=2a+2b=2(a+b)=0\\ \|au+bv\|^2=a^2\|u\|^2+2ab(u\mid v)+b^2\|v\|^2=2a^2+4ab+3b^2=2(a+b)^2+b^2=1\end{cases}$$

  Ceci donne $b=-a$ et $b^2=1$, et on peut prendre $a=-1$ et $b=1$, soit $e_2=v-u=(0,1,0)$.

- On cherche enfin $e_3=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma w$ tel que $(e_3\mid e_1)=(e_3\mid e_2)=0$ et $\|e_3\|^2=(e_3\mid e_3)=1$, soit :

$$\begin{cases}(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma w\mid e_1)=\alpha(e_1\mid e_1)+\gamma(w\mid e_1)=\alpha-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\gamma=0\\(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma w\mid e_2)=\beta+\gamma=0\\\|e_3\|^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_3=\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\\\alpha^2=1\end{cases}$$

On peut prendre $e_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$.

Ainsi :

La base orthonormée (e_1,e_2,e_3) avec $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$ est obtenue à partir de (u,v,w) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

3) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, le produit scalaire canonique est celui pour lequel la base canonique $(1,X,X^2,X^3)$ est orthonormée. On cherche $F^\perp$, avec :

$$F=\{(X^2-X)P,\ P\in\mathbb{R}_1[X]\}=\{(X^2-X)(aX+B),\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}\left(X^2-X,\ X^3-X^2\right).$$

Soit $P=aX^3+bX^2+cX+d\in\mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$P\in F^\perp\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}P\perp X^2-X\\P\perp X^3-X^2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}(P\mid X^2-X)=0\\(P\mid X^3-X^2)=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}(P\mid X^2-X)=b-c=0\\(P\mid X^3-X^2)=a-b=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad a=b=c$$

Donc :

$$F^\perp=\{aX^3+aX^2+aX+d,\ (a,d)\in\mathbb{R}^2\}=\{a(X^3+X^2+X)+d,\ (a,d)\in\mathbb{R}^2\}.$$

Soit :

$$\boxed{F^\perp=\mathrm{Vect}\left(1,\ X^3+X^2+X\right)}$$

4) Les vecteurs $e_1,\dots,e_n$ sont des vecteurs unitaires d'un espace euclidien *E*, et on suppose que pour tout $x\in E$:

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle^2.$$

Comme les e_k sont unitaires, prouver que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de *E* revient à prouver que c'est une famille orthogonale, autrement dit, que pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ tels que $i\neq j$, $\langle e_i,e_j\rangle=0$.

Par hypothèse, on a pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$$\|e_i\|^2=\sum_{k=1}^{n}\langle e_i,e_k\rangle^2=\langle e_i,e_i\rangle^2+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\langle e_i,e_k\rangle^2=\|e_i\|^4+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\langle e_i,e_k\rangle^2.$$

Comme $\|e_i\| = 1$, on a $\|e_i\|^2 = \|e_i\|^4 = 1$ et donc $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2 = 0$. On a ainsi une somme nulle de nombres positifs, donc $\langle e_i, e_k \rangle^2 = 0$, soit $\langle e_i, e_k \rangle = 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $k \neq i$.

Ainsi, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthogonale et donc :

$$\boxed{(e_1, \dots, e_n) \text{ est une base orthonormale de } E.}$$

5) *F* et *G* sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien *E*. On a :

$$\begin{cases} F \subset F \cup G \\ G \subset F \cup G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (F \cup G)^{\perp} \subset F^{\perp} \\ (F \cup G)^{\perp} \subset G^{\perp} \end{cases}$$

Remarquons que l'équivalence (la réciproque est inutile pour le raisonnement) est vraie car on est en dimension finie. Les deux dernières inclusions ci-dessus impliquent alors que :

$$\underline{(F \cup G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}.}$$

Et, si $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$, alors, x est orthogonal à tout vecteur de *F* et de *G*, donc à tout vecteur de $F \cup G$. Autrement dit, $x \in (F \cup G)^{\perp}$ et donc :

$$\underline{F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F \cup G)^{\perp}.}$$

Ainsi :

$$\boxed{(F \cup G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}}$$

Chapitre 16

1) On pose $u : x \mapsto k(a \mid x)a + x$ avec *E* un espace euclidien, $k \in \mathbb{R}$ et $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$.

Par bilinéarité du produit scalaire, $x \mapsto (a \mid x)a$ est linéaire, donc un endomorphisme de *E*. Comme *u* est une combinaison linéaire de cet endomorphisme est de id_E, *u* est un endomorphisme de *E*.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\big(u(x) \mid y\big) = \big(k(a \mid x)a + x \mid y\big) = k(a \mid x)(a \mid y) + (x \mid y) = k(a \mid y)(x \mid a) + (x \mid y) = \big(x \mid k(a \mid y)a + y\big) = \big(x \mid u(y)\big).$$

Ainsi, *u* est symétrique et donc :

L'application *u* est un endomorphisme symétrique de *E*.

Posons $a = e_1$ et $(e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\{a\}^{\perp}$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est alors une base orthonormée de *E*. On a alors :

- $u(e_1) = k(a \mid e_1)a + e_1 = k(e_1 \mid e_1)e_1 + e_1 = (k+1)e_1$;
- Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) = k(a \mid e_j)a + e_j = k(e_1 \mid e_j)e_1 + e_j = e_j$.

Donc, $M_{\mathcal{B}}(u) = diag\,(k+1, 1, \dots, 1)$. Cette matrice est orthogonale si et seulement si $|k+1| = 1$, donc si seulement si $k = 0$ ou -2.

Ainsi :

u est un automorphisme orthogonal si seulement si $k = 0$ ou -2, et $u = id_E$ dans le premier cas, et *u* est la réflexion par rapport à $\{a\}^{\perp}$ dans le second.

2) a. On a $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \neq 0_2$ et $A^2 = {}^tA$. Alors :

$$A = {}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = (A^2)^2 = A^4.$$

Donc :

$X^4 - X$ est un polynôme annulateur de *A*.

b. Si $0 \in Sp(A)$, χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$ (car *A* est une matrice 2×2) avec $\chi_A = X(X - \lambda)$.
Or, $X^4 - X = X(X-1)(X-j)(X-\overline{j})$ un polynôme annulateur de *A* scindé à racines simples, donc *A* est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses seules valeurs propres (réelles) possibles sont 0 et 1. Or, si 0 était sa seule valeur propre, *A* serait semblable à la matrice nulle, donc nulle, ce qui n'est pas. Ainsi, 0 et 1 sont les valeurs propres de *A*, soit :

$$\boxed{Sp(A) = \{0, 1\}}$$

c. D'après ce qui précède, $\chi_A = X(X-1)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, donc *A* est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Avec $Sp(A) = \{0, 1\}$, il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons que $B^2 = B = {}^tB$, donc :

$${}^tA = A^2 = (PBP^{-1})^2 = PB^2P^{-1} = PBP^{-1} = A\,.$$

Ainsi, A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit :

$$\boxed{A \text{ est semblable à } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec une matrice de passage orthogonale.}}$$

3) Les applications $P \mapsto XP'$ et $P \mapsto (X^2-1)P''$ sont linéaires (par linéarité de la dérivation).

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg P' \leq n-1$ et $\deg P'' \leq n-2$, donc $\deg\left(XP'\right) = 1 + \deg P' \leq n$ et $\deg\left((X^2-1)P''\right) = 2 + \deg P'' \leq n$. Ainsi, $P \mapsto XP'$ et $P \mapsto (X^2-1)P''$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ et finalement, comme f est une combinaison linéaire de ces deux endomorphismes :

$$\boxed{f : P \mapsto 2XP' + (X^2-1)P'' \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

On a $f(1) = 0$, $f(X) = 2X$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$:

$$f(X^k) = 2X\left(kX^{k-1}\right) + (X^2-1)\left(k(k-1)X^{k-2}\right) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$$

Ainsi, si on note $\mathcal{B}_c = \left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & 0 \\
0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & & & \vdots \\
0 & 0 & 6 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 12 & \ddots & -k(k-1) & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \ddots\ \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & k(k+1) & \ddots\ \ddots & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots\ \ddots & -n(n-1) \\
\vdots & & & & & & \ddots\ \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 & n(n+1)
\end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, donc les valeurs propres de f sont les coefficients diagonaux (tous distincts car l'application $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc injective). Ainsi :

$$\boxed{Sp(f) = \left\{0, 2, 6, \dots, k(k+1), \dots, n(n+1)\right\} = \left\{k(k+1), k \in [\![0, n]\!]\right\}}$$

Pour tout $(P, Q) \in \left(\mathbb{R}_n[X]\right)^2$, on a :

$$\left\langle f(P), Q\right\rangle = \left\langle 2XP' + (X^2-1)P'', Q\right\rangle = 2\left\langle XP', Q\right\rangle + \left\langle (X^2-1)P'', Q\right\rangle = 2\int_{-1}^{1} tP'(t)Q(t)dt + \int_{-1}^{1} (t^2-1)P''(t)Q(t)dt\,.$$

Toutes les applications en jeu sont polynomiales donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On peut réaliser des intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} tP'(t)Q(t)dt &= \left[tP(t)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P(t)\left(Q(t) + tQ'(t)\right)dt \\
&= Q(1)P(1) + Q(-1)P(-1) - \int_{-1}^{1} P(t)\left(Q(t) + tQ'(t)\right)dt
\end{aligned}$$

Et :

$$\int_{-1}^{1}(t^2-1)P''(t)Q(t)dt=\left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}P'(t)\left(2tQ(t)+(t^2-1)Q'(t)\right)dt$$

$$=-\left[P(t)\left(2tQ(t)+(t^2-1)Q'(t)\right)\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}P(t)\left(2Q(t)+4tQ'(t)+(t^2-1)Q''(t)\right)dt$$

$$=-2Q(1)P(1)-2Q(-1)P(-1)+2\int_{-1}^{1}P(t)\left(Q(t)+tQ'(t)\right)dt$$

$$+\int_{-1}^{1}P(t)\left(2tQ'(t)+(t^2-1)Q''(t)\right)dt$$

$$=-2\int_{-1}^{1}tP'(t)Q(t)dt+\left\langle P,f(Q)\right\rangle$$

Soit :

$$\int_{-1}^{1}(t^2-1)P''(t)Q(t)dt+2\int_{-1}^{1}tP'(t)Q(t)dt=\left\langle P,f(Q)\right\rangle.$$

Ainsi $\left\langle f(P),Q\right\rangle=\left\langle f(P),Q\right\rangle$ et ceci pour tous $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$, donc :

$\boxed{\text{L'application } f \text{ est symétrique pour le produit scalaire } (P,Q)\mapsto\left\langle P,Q\right\rangle=\int_{-1}^{1}PQ\,.}$

4) Notons C_1,C_2,C_3,C_4 les colonnes de *M*. On a $C_3=-C_1$ et $C_4=-C_2$. Comme C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires :

$$\boxed{rg\,(M)=2}$$

Notons $\mathcal{B}_c=\left(e_1,e_2,e_3,e_4\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et *u* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à *M*.

D'après ce qui précède $\operatorname{Im}M=\operatorname{Vect}\left(u(e_1),u(e_2)\right)=\operatorname{Vect}\left(C_1,C_2\right)$. Et $C_1=e_1-e_3$, et $C_2=e_2-e_4$, donc :

$$\boxed{\operatorname{Im}M=\operatorname{Vect}\left(e_1-e_3,e_2-e_4\right)}$$

Remarquons que $\left(e_1-e_3\mid e_2-e_4\right)=0$, donc $\left(e_1-e_3,e_2-e_4\right)$ est une base orthogonale de l'image de *M*.

Le théorème du rang donne $\dim\left(\ker M\right)=2$ et comme $C_1+C_3=u(e_1+e_3)=0$, $C_2+C_4=u(e_2+e_4)=0$ et les vecteurs e_1+e_3 et e_2+e_4 ne sont pas colinéaires, on a :

$$\boxed{\ker M=\operatorname{Vect}\left(e_1+e_3,e_2+e_4\right)}$$

Remarquons que $\left(e_1-e_3\mid e_2-e_4\right)=0$, donc $\left(e_1-e_3,e_2-e_4\right)$ est une base orthogonale du noyau de *M*.

On a :

$$\left(e_1-e_3\mid e_1+e_3\right)=\left(e_2-e_4\mid e_2+e_4\right)=1-1=0$$
$$\left(e_1-e_3\mid e_2+e_4\right)=\left(e_2-e_4\mid e_1+e_3\right)=0$$

Donc, les vecteurs d'une base de $\operatorname{Im}M$ sont orthogonaux aux vecteurs d'une base de $\ker M$, donc :

$$\boxed{\ker M\perp\operatorname{Im}M}$$

Comme $\ker M$ et $\operatorname{Im} M$ sont orthogonaux et $\dim(\ker M)+\dim(\operatorname{Im} M)=4$, on a $\ker M=(\operatorname{Im} M)^{\perp}$, $\mathbb{R}^4=\ker M\oplus\operatorname{Im} M$ et $\mathcal{B}=(e_1+e_3, e_2+e_4, e_1-e_3, e_2-e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ adaptée à cette décomposition.

Or, $u(e_1)=-u(e_3)=e_1-e_3$ et $u(e_2)=-u(e_4)=e_2-e_4$, donc :

$$\begin{aligned}
&u(e_1-e_3)=2u(e_1)=2(e_1-e_3)\\
&u(e_2-e_4)=2u(e_2)=2(e_2-e_4)\\
&u(e_1+e_3)=0\\
&u(e_2+e_4)=0
\end{aligned}$$

Et ainsi, on a $M_{\mathcal{B}}(u)=diag\left(0,0,2,2\right)$. Finalement :

$$\boxed{Sp(M)=\{0;2\},\ \ker M=\operatorname{Vect}(e_1+e_3, e_2+e_4)\ \text{ et }\ \ker(M-2I_4)=\operatorname{Im} M=\operatorname{Vect}(e_1-e_3, e_2-e_4).}$$

On a $M_{\mathcal{B}}(u)=diag\left(0,0,2,2\right)=2\,diag\left(0,0,1,1\right)$ et $diag\left(0,0,1,1\right)$ est la matrice de la projection orthogonale p sur $\operatorname{Im} M$ (parallèlement à $\ker M=(\operatorname{Im} M)^{\perp}$). Ainsi :

> M est la matrice de la composée de $2id_{\mathbb{R}^4}$, l'homothétie de rapport 2, par la projection orthogonale p sur $\operatorname{Vect}(e_1-e_3, e_2-e_4)$.

Comme – 1 n'est pas valeur propre de M, $\ker(M+I_4)=\{0\}$ et donc :

$$\boxed{A=I_4+M\ \text{ est inversible.}}$$

Si on note $P=P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$, on a $P^{-1}MP=M_{\mathcal{B}}(u)=2D$ avec $D=diag\left(0,0,1,1\right)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $D^n=D$. Alors :

$$M=2PDP^{-1}\ \text{ et }\ M^2=4PD^2P^{-1}=2\left(2PDP^{-1}\right)=2M\ .$$

On a alors $M^3=2M^2=4M=2^2M$ et on prouve par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $M^n=2^{n-1}M$ (*le faire*).
Comme M et I_4 commutent, on peut écrire pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
A^n=(I_4+M)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}M^k=I_4+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{k-1}M\\
&=I_4+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k\right]M=I_4+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k-1\right]M=I_4+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)M
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^{-n}=(A^n)^{-1}$ et comme $M^2=2M$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(A^n\right)^2=\left(I_4+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)M\right)^2&=I_4+\left(3^n-1\right)M+\frac{1}{4}\left(3^n-1\right)^2M^2=I_4+\left(3^n-1\right)M+\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)^2M\\
&=I_4+\frac{1}{2}\left[2\left(3^n-1\right)+\left(3^n-1\right)^2\right]M=I_4+\frac{1}{2}\left[\left(3^n-1+1\right)^2-1\right]M=I_4+\frac{1}{2}\left((3^n)^2-1\right)M\\
&=I_4+\frac{1}{2}\left(3^n+1\right)\left(3^n-1\right)M=I_4+\left(3^n+1\right)\left(A^n-I_4\right)=\left(3^n+1\right)A^n-3^nI_4
\end{aligned}$$

Donc, $I_4 = \frac{1}{3^n}\left[\left(3^n+1\right)A^n - \left(A^n\right)^2\right] = \frac{1}{3^n}\left[\left(3^n+1\right)I_4 - A^n\right]A^n$ et ainsi, avec $A^n = I_4 + \frac{1}{2}\left(3^n-1\right)M$:

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = \frac{1}{3^n}\left[\left(3^n+1\right)I_4 - A^n\right] = \frac{1}{3^n}\left[\left(3^n+1\right)I_4 - \left(I_4 + \frac{1}{2}\left(3^n-1\right)M\right)\right] = I_4 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)M .$$

Finalement, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} A^{-n} = I_4 - \frac{1}{2}M$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} A^{-n} = I_4 - \frac{1}{2}M = I_4 - PDP^{-1} = P(I_4 - D)P^{-1}.$$

Ainsi, $I_4 - \frac{1}{2}M$ est la matrice de $id_{\mathbb{R}^4} - p$ le projecteur associé à p, donc :

$$\boxed{\text{La suite } \left(A^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } I_4 - \frac{1}{2}M \text{, qui est la matrice de la projection sur } \mathrm{Vect}\left(e_1+e_3, e_2+e_4\right) \text{ parallèlement à } \mathrm{Vect}\left(e_1-e_3, e_2-e_4\right).}$$

On note s, la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Im}\, M$.

Comme $p = \frac{1}{2}u$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, M$, on a $s = 2p - id_{\mathbb{R}^4} = u - id_{\mathbb{R}^4}$, donc :

$$\boxed{\text{La matrice de } s \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}^4 \text{ est } M - I_4.}$$

5) On cherche les matrices $n\times n$ à coefficients entiers et orthogonales.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ une telle matrice.

On a pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$. Ceci implique que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $0 \le a_{i,j}^2 \le 1$, donc que $a_{i,j}^2 = 0 \text{ ou } 1$, car $a_{i,j}^2$ est un entier. De plus, pour avoir $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$, il faut alors qu'exactement l'un des $a_{i,j}^2$ soit égal à 1 et tous les autres nuls. Ainsi, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe $i_0 = \varphi(j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{i_0,j}^2 = 1$, soit $a_{i_0,j} = a_{\varphi(j),j} = \pm 1$ et $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!] \backslash \{\varphi(j)\}$.

Ceci peut se résumer en $a_{i,j} = \pm\, \delta_{i,\varphi(j)}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Enfin, on a doit avoir pour tous $j, j' \in [\![1,n]\!]$ tels que $j \ne j'$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,j'} = 0$, soit $a_{\varphi(j),j}a_{\varphi(j),j'} = 0$ et comme $a_{\varphi(j),j} = \pm 1$, ceci donne $a_{\varphi(j),j'} = 0$ et donc $\varphi(j) \ne \varphi(j')$.

Ainsi, φ est une injection de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, donc une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, autrement dit une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Ainsi, $A = (\pm\, \delta_{i,\varphi(j)})_{1\le i,j\le n}$ où φ est une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Réciproquement, si $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ a la forme ci-dessus, A est à coefficients entiers et pour tous $j, j' \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,j'} = \sum_{i=1}^{n} (\pm\, \delta_{i,\varphi(j)})(\pm\, \delta_{i,\varphi(j')}) = \begin{cases} (\pm\, \delta_{\varphi(j),\varphi(j)})(\pm\, \delta_{\varphi(j),\varphi(j')}) = 0 & \text{quand } j \ne j' \\ (\pm\, \delta_{\varphi(j),\varphi(j)})^2 = 1 & \text{quand } j = j' \end{cases}$$

Donc, A est orthogonale.

Finalement :

Les matrices $n\times n$ à coefficients entiers et orthogonales sont les matrices de la forme $(\pm\,\delta_{i,\varphi(j)})_{1\le i,j\le n}$ où φ est une permutation de $[\![1,n]\!]$.

6) On note $\mathcal{B}_c=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (muni du produit scalaire canonique).

On note s est la symétrie orthogonale par rapport à :

$$P:\begin{cases}x+y+z+t=0\\ x-y+z-t=0\end{cases}$$

Soit $X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a :

$$X\in P\iff\begin{cases}x+y+z+t=0\\ x-y+z-t=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+z=0\\ y+t=0\end{cases}\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\iff X\in\operatorname{Vect}(f_1,f_2).$$

avec $f_1=\dfrac{1}{\sqrt2}(1,0,-1,0)=\dfrac{1}{\sqrt2}(e_1-e_3)$ et $f_2=\dfrac{1}{\sqrt2}(0,1,0,-1)=\dfrac{1}{\sqrt2}(e_2-e_4)$.

On a donc $P=\operatorname{Vect}(f_1,f_2)$.

Les vecteurs f_1 et f_2 sont unitaires et orthogonaux. On peut compléter (f_1,f_2) en une base orthonormée $\mathcal{B}=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ de $\mathbb{R}^4$, en posant $f_3=\dfrac{1}{\sqrt2}(1,0,1,0)=\dfrac{1}{\sqrt2}(e_1+e_3)$ et $f_4=\dfrac{1}{\sqrt2}(0,1,0,1)=\dfrac{1}{\sqrt2}(e_2+e_4)$.

La symétrie orthogonale s est alors la symétrie par rapport à $P=\operatorname{Vect}(f_1,f_2)$, parallèlement à $P^\perp=\operatorname{Vect}(f_3,f_4)$. On a alors :

$$\begin{cases}s(f_1)=f_1\\ s(f_2)=f_2\\ s(f_3)=-f_3\\ s(f_4)=-f_4\end{cases}\iff\begin{cases}s(e_1-e_3)=s(e_1)-s(e_3)=e_1-e_3\\ s(e_2-e_4)=s(e_2)-s(e_4)=e_2-e_4\\ s(e_1+e_3)=s(e_1)+s(e_3)=-e_1-e_3\\ s(e_2+e_4)=s(e_2)+s(e_4)=-e_2-e_4\end{cases}\iff\begin{cases}s(e_1)=-e_3\\ s(e_2)=-e_4\\ s(e_3)=-e_1\\ s(e_4)=-e_2\end{cases}$$

Ainsi :

La matrice de s dans la base canonique est $\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$

7) On prend un entier $n\ge2$ et $u:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,;\,M\mapsto -M+tr(M)I_n$.

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$u(M)=-M\iff tr(M)I_n=0_n\iff tr(M)=0.$$

Donc :

-1 est valeur propre de u et $E_{-1}(u)=\ker\left(u+id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right)=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ tr(M)=0\}$.

Remarquons que comme la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E_{-1}(u)=\ker(Tr)$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc de dimension n^2-1.

Remarquons de plus que, si $\left(E_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors, pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]$ tels que $i\neq j$, on a $tr(E_{i,j})=0$, donc $E_{i,j}\in E_{-1}(u)$. De plus, pour tout $i\in[\![2,n]\!]$, on a $tr(E_{1,1}-E_{i,i})=1-1=0$, donc $E_{1,1}-E_{i,i}\in E_{-1}(u)$. La famille $\left(\left(E_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n,\, i\neq j}\cup\left(E_{1,1}-E_{i,i}\right)_{i\in[\![2,n]\!]}\right)$ contient $(n^2-n)+(n-1)=n^2-1$ matrices et est libre (*à prouver*), donc :

$$\boxed{\left(\left(E_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n,\, i\neq j}\cup\left(E_{1,1}-E_{i,i}\right)_{i\in[\![2,n]\!]}\right)\text{ est une base de } E_{-1}(u).}$$

On vient de voir que – 1 est valeur propre de u et que la dimension du sous-espace propre associé est n^2-1 (avec $\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)=n^2$).

Soit maintenant $\lambda\in\mathbb{R}$ une éventuelle valeur propre de u différente de – 1 et $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. On a alors $u(M)=-M+tr(M)I_n=\lambda M$, soit :

$$(\lambda+1)M=tr(M)I_n.$$

Comme $(\lambda+1)M\neq 0_n$, on a $tr(M)\neq 0$ et, en passant à la trace dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$(\lambda+1)\times tr(M)=tr(M)\times tr(I_n)=tr(M)\times n.$$

Avec $tr(M)\neq 0$, on a $\lambda+1=n$, soit $\lambda=n-1$ et :

$$M=\frac{tr(M)}{\lambda+1}I_n=\frac{tr(M)}{n}I_n.$$

Ainsi, tout vecteur propre associé à $n-1$ est proportionnelle à I_n.

Réciproquement, on a :

$$u(I_n)=-I_n+tr(I_n)I_n=-I_n+nI_n=(n-1)I_n.$$

Donc $n-1$ est bien valeur propre de u et I_n est un vecteur propre associé.

On a alors $E_{n-1}(u)=\ker\left(u-(n-1)id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right)=\mathrm{Vect}\left(I_n\right)$ et $\dim\left(E_{n-1}(u)\right)=1$.

Finalement, $\dim\left(E_{-1}(u)\right)+\dim\left(E_{n-1}(u)\right)=(n^2-1)+1=n^2=\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$, donc :

$$\boxed{u\text{ est diagonalisable.}}$$

On a vu que u est diagonalisable avec $Sp(u)=\{-1,n-1\}$, $\dim\left(E_{-1}(u)\right)=n^2-1$ et $\dim\left(E_{n-1}(u)\right)=1$, donc – 1 est de multiplicité n^2-1 et $n-1$ de multiplicité 1, d'où :

- $\det u=(-1)^{n^2-1}(n-1)=(-1)^{n-1}(n-1)$ (car n et n^2 ont la même parité) :
- $tr(u)=(n^2-1)(-1)+(n-1)=n-n^2$.

Finalement :

$$\boxed{\det u=(-1)^{n-1}(n-1)\ \text{ et }\ tr(u)=n-n^2.}$$

Soit $(\cdot|\cdot)$ un éventuel produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel u est un endomorphisme symétrique.

On a alors pour toutes $M,N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(u(M)\mid N)=(M\mid u(N)) &\Leftrightarrow \left(-M+tr(M)I_n\mid N\right)=\left(M\mid -N+tr(N)I_n\right)\\ &\Leftrightarrow -(M\mid N)+tr(M)(I_n\mid N)=-(M\mid N)+tr(N)(M\mid I_n)\\ &\Leftrightarrow tr(M)(I_n\mid N)=tr(N)(I_n\mid M)\end{aligned}$$

En considérant (à tout hasard !) le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A,B)\mapsto(A\mid B)=tr({}^tAB)$, on a, pour toutes matrices M,N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(I_n\mid M)=tr({}^tI_nM)=tr(M)$ et de la même façon $(I_n\mid N)=tr(N)$, donc $tr(M)(I_n\mid N)=tr(N)(I_n\mid M)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ est symétrique pour le produit scalaire canonique de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

La base canonique $(E_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (par définition), donc la famille extraite $(E_{i,j})_{1\le i,j\le n,\, i\ne j}$ l'est aussi.

De plus, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ tels que $i\ne j$ et tout $k\in[\![2,n]\!]$, on a :

$$\left(E_{i,j}\mid E_{1,1}-E_{k,k}\right)=\left(E_{i,j}\mid E_{1,1}\right)-\left(E_{i,j}\mid E_{k,k}\right)=0-0=0.$$

Donc, la base $\left((E_{i,j})_{1\le i,j\le n,\, i\ne j}\cup(E_{1,1}-E_{i,i})_{i\in[\![2,n]\!]}\right)$ de $E_{-1}(u)$ est orthogonale et comme pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, on a $\|E_{1,1}-E_{k,k}\|=\sqrt{2}$, on en déduit que la famille $\left((E_{i,j})_{1\le i,j\le n,\, i\ne j}\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,1}-E_{k,k})\right)_{2\le k\le n}\right)$ est une base orthonormale de $E_{-1}(u)$.

Par ailleurs, pour tout $M\in E_{-1}(u)=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ tr(M)=0\}$, on a $(I_n\mid M)=tr(M)=0$, donc :

$$E_{-1}(u)\perp E_{n-1}(u).$$

Enfin, $\|I_n\|=\sqrt{n}$, donc $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}I_n\right)$ est une base orthonormale de $E_{n-1}(u)$ et finalement, pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\left((E_{i,j})_{1\le i,j\le n,\, i\ne j}\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,1}-E_{k,k})\right)_{2\le k\le n}\cup\left(\frac{1}{\sqrt{n}}I_n\right)\right)\text{ est une base orthonormée de de vecteurs propres de } u.}$$

8) Posons $B={}^tAA=A{}^tA$. Comme A et ${}^tA$ commutent, on a $B^k=({}^tA)^kA^k=(A^t)^kA^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, et en particulier $B^p=(A^t)^pA^p=(A^t)^p0_n=0_n$. Donc, B est nilpotente.

On a $(\det B)^p=\det(B^p)=\det 0_n=0$, donc $\det B=0$ et B n'est pas inversible. Ainsi, 0 est valeur propre de B.

Or, X^p est annulateur de B, donc le spectre de B est inclus dans l'ensemble des racines de X^p, donc 0 est la seule valeur propre de B.

Par ailleurs, on a ${}^tB={}^t({}^tAA)={}^tA{}^t({}^tA)={}^tAA=B$, donc B est symétrique réelle, donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Or, si une matrice est diagonalisable et n'admet que 0 pour valeur propre, alors elle est semblable à 0_n, donc égale à 0_n. Ainsi :

$$\boxed{B={}^tAA=A{}^tA=0_n}$$

Soit maintenant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ quelconque.

En utilisant le produit scalaire et la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\|AX\|^2 = {}^t(AX)(AX) = {}^tX\,{}^tAAX = {}^tX\,0_n\,X = 0.$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| = 0$, soit $AX = 0$ et donc :

$$\boxed{A = 0_n}$$

9) On a $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\sigma = ab + bc + ca$ et $s = a + b + c$.

La matrice M est orthogonale si et seulement si ses colonnes sont orthonormées, soit :

$$\begin{cases} ab + bc + ca = \sigma = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Or, $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = s^2 - 2\sigma$, donc M est orthogonale si et seulement si :

$$\begin{cases} \sigma = 0 \\ s^2 - 2\sigma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = 0 \\ s^2 = 1 \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{M \text{ est orthogonale si et seulement si } \sigma = 0 \text{ et } |s| = 1.}$$

La matrice M appartient à $SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si elle appartient à $O_3(\mathbb{R})$ et son déterminant vaut 1.

On a :

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} s & b & c \\ s & a & b \\ s & c & a \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} s \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\det M = s \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} = s\left[(a-b)(a-c) - (c-b)(b-c)\right] = s(s^2 - 3\sigma).$$

Alors :

$$M \in SO_3(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} M \in O_3(\mathbb{R}) \\ \det M = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sigma = 0 \\ s^2 = 1 \\ s(s^2 - 3\sigma) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sigma = 0 \\ s = 1 \end{cases}$$

On a donc bien :

$$\boxed{M \in SO_3(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \sigma = 0 \text{ et } s = 1.}$$

Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a, avec les notations ci-dessus :

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - sX^2 + \sigma X - abc.$$

Donc, pour $k \in \mathbb{R}$, si trois réels *a*, *b* et *c* sont racines de $X^3 - X^2 + k$, alors $s = 1$, $\sigma = 0$ et $k = -abc$.

Enfin, pour avoir l'équivalence souhaitée : *a*, *b* et *c* racines de $X^3 - X^2 + k$ si et seulement si $s = 1$ et $\sigma = 0$ (avec $k = -abc$), il faut que le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admette trois racines réelles (distinctes ou pas).

Pour $k \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = x^3 - x^2 + k$. La fonction polynomiale *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = (3x-2)x.$$

On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$2/3$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$f(2/3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Et $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = k - \dfrac{4}{27}$.

Alors :

- Si $f(0) = k < 0$, $X^3 - X^2 + k$ n'a pas de racine réelle inférieure à $\dfrac{2}{3}$ et une unique racine réelle supérieure à $\dfrac{2}{3}$ (assurée par le théorème de la bijection continue à appliqué à *f* sur $\left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$).
- Si $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = k - \dfrac{4}{27} > 0$, soit $k > \dfrac{4}{27}$, $X^3 - X^2 + k$ n'a pas de racine réelle positive et une unique racine réelle négative (assurée par le théorème de la bijection continue à appliqué à *f* sur $\left]-\infty, 0\right]$).
- Si $k \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$, alors $f(0) \geq 0$ et $f\left(\dfrac{2}{3}\right) \leq 0$, et le théorème de la bijection continue assure l'existence de trois racines réelles (pas forcément distinctes) : l'une négative, l'autre comprise entre 0 et $\dfrac{2}{3}$, et la dernière supérieure à $\dfrac{2}{3}$.

Ainsi, $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines réelles (distinctes ou pas) si et seulement si $k \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$.

Finalement, trois réels *a*, *b* et *c* sont racines de $X^3 - X^2 + k$ si et seulement si $k = -abc \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$, $s = 1$ et $\sigma = 0$. Avec la question précédente, on peut conclure que :

$$\boxed{M \in SO_3(\mathbb{R}) \text{ si et seulement s'il existe } k = -abc \in \left[0, \frac{4}{27}\right], \text{ tel que } a, b \text{ et } c \text{ sont les racines de } X^3 - X^2 + k.}$$