

DS de Mathématiques n° 4
4 heures
Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte 5 pages.
Exercice 1 (extrait : E3A - PSI - 2011)

On considère les suites de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur \mathbb{R} par :

$$u_n(t) = \frac{1}{1 + (t + 2\pi n)^2} \quad \text{et} \quad v_n(t) = \frac{1}{1 + (t - 2\pi n)^2}$$

Partie A

- (1) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et v_n convergent simplement sur \mathbb{R} .
- (2) Soit a un réel strictement positif.
 - (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{t \in [-a, a]} |u_n(t)| = u_n(-a).$$
 - (b) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et u'_n convergent uniformément sur $[-a, a]$.

On admettra qu'il en est de même pour les séries de fonctions de terme général v_n et v'_n .

- (3) On pose $F = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$
 - (a) Démontrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Ecrire l'énoncé précis du théorème utilisé.
 - (b) Démontrer que F est paire.
 - (c) Démontrer que F est 2π -périodique.

Exercice 2 (extrait : Centrale - PSI - 2020)

I Fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère, dans toute cette partie, l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{cases}$$

- Q 1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, +\infty[$. Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W . On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geq -e^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1, +\infty[$).
- Q 2. Justifier que W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$ et est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -e^{-1}, +\infty[$.
- Q 3. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.
- Q 4. Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$ ainsi qu'un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
- Q 5. Tracer, sur le même dessin, les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_W représentatives des fonctions f et W . Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à \mathcal{C}_W au point d'abscisse $-e^{-1}$.
- Q 6. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$?
- Q 7. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?
- Q 8. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, 0[$. Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V .
- Q 9. Pour un paramètre réel m , on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$xe^x = m \tag{I.1}$$

Déterminer, en fonction de m , le nombre de solutions de (I.1). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W .

- Q 10. Pour un paramètre réel m , on considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$xe^x \leq m \tag{I.2}$$

En utilisant les fonctions V et W , déterminer, suivant les valeurs de m , les solutions de (I.2). Illustrer graphiquement les différents cas.

- Q 11. Pour des paramètres réels non nuls a et b , on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ax} + bx = 0 \tag{I.3}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a et b , le nombre de solutions de (I.3). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W .

IV Approximation de W

On définit dans cette partie une suite de fonctions $(w_n)_{n \geq 0}$ et on étudie sa convergence vers la fonction W définie dans la partie I.

Pour tout réel positif x , on considère la fonction ϕ_x définie par

$$\phi_x : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x \exp(-x \exp(-t)) \end{cases}$$

et on définit, sur \mathbb{R}^+ , une suite de fonctions $(w_n)_{n \geq 0}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \begin{cases} w_0(x) = 1 \\ w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x)) \end{cases}$$

- Q 35. Démontrer que, pour tout réel positif x , $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x , c'est-à-dire une solution de l'équation $\phi_x(t) = t$.

Q 36. Démontrer que, pour tout réel positif x , la fonction ϕ_x est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \phi'_x(t) \leq \frac{x}{e}.$$

Q 37. En déduire que

$$\forall x \in [0, e], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)|.$$

Q 38. Pour tout réel $a \in]0, e[$, justifier que la suite de fonctions (w_n) converge uniformément sur $[0, a]$ vers la fonction W .

Q 39. La suite de fonctions (w_n) converge-t-elle uniformément vers W sur $[0, e]$?

Exercice 3 (extrait : Centrale - PSI - 2021)

II Matrices stochastiques et distributions de probabilité

Définitions

Soit $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ un vecteur de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. On dit que X est une distribution de probabilité si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \geq 0$ et $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une matrice stochastique si chaque ligne de M est une distribution de probabilité.

II.A –

Q 12. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Montrer que M est une matrice stochastique si et seulement si

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II.B –

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques, $X \in \mathbb{R}^n$ une distribution de probabilité et $\alpha \in [0, 1]$.

Q 14. Montrer que XM est une distribution de probabilité.

Q 15. Montrer que MN est une matrice stochastique.

Q 16. Montrer que $\alpha M + (1 - \alpha)N$ est une matrice stochastique.

II.C –

Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre (réelle ou complexe) de M . On note (u_1, \dots, u_n) les composantes (réelles ou complexes), dans la base canonique, d'un vecteur propre u associé à λ .

II.C.1)

Q 17. Soit $h \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|u_h| = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$. Montrer que $|\lambda - m_{h,h}| \leq 1 - m_{h,h}$. En déduire que $|\lambda| \leq 1$.

Q 18. Soit $\delta = \min_{1 \leq i \leq n} m_{i,i}$. Montrer que $|\lambda - \delta| \leq 1 - \delta$. Donner une interprétation géométrique de ce résultat et montrer que, si tous les termes diagonaux de M sont strictement positifs, alors 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

II.C.2)

On suppose désormais que tous les coefficients $m_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq n$) de la matrice stochastique M sont strictement positifs.

Q 19. Démontrer que $\dim(\ker(M - I_n)) = 1$.

Si (u_1, \dots, u_n) désigne les composantes (réelles) dans la base canonique d'un vecteur de $\ker(M - I_n)$, on pourra utiliser $\min_{1 \leq i \leq n} u_i$.

Q 20. En déduire qu'il existe au plus une distribution de probabilité X invariante par M , c'est-à-dire vérifiant $XM = X$.

On pose $\varepsilon = \min_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}$.

On s'intéresse à la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ des puissances de M . On note $m_{i,j}^{(k)}$ le coefficient de la matrice M^k situé à la ligne i et la colonne j .

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose

$$\begin{cases} \alpha_j^{(k)} = \min_{1 \leq i \leq n} m_{i,j}^{(k)}, \\ \beta_j^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} m_{i,j}^{(k)}. \end{cases}$$

Dans les quatre questions suivantes, j est un entier fixé dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et k est fixé dans \mathbb{N} .

Q 21. Démontrer les inégalités $\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$.

Q 22. Démontrer qu'il existe un couple $(i_0, j_0) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que

$$\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geq m_{i_0, j_0} (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}).$$

Q 23. Démontrer qu'il existe un couple $(i_1, j_1) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que

$$\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} \geq m_{i_1, j_1} (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}).$$

Q 24. En déduire que $\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leq (1 - 2\varepsilon)(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$.

Q 25. Démontrer que la suite (M^k) converge vers une matrice stochastique $B = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ b_1 & \dots & b_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ dont toutes les lignes sont égales.

On note P^∞ la ligne (b_1, \dots, b_n) .

Q 26. Démontrer que, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $b_i > 0$.

Q 27. Démontrer que la suite $(P^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} = (P^{(0)}M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers P^∞ , quelle que soit la distribution de probabilité initiale $P^{(0)}$.

Q 28. Démontrer que P^∞ est l'unique distribution de probabilité P invariante par M , c'est-à-dire vérifiant $PM = P$.

Fin de l'énoncé