Exercices d'entrainement

Chapitre 1

1) Nature de la série $\sum\left(\arctan(n+\alpha)-\arctan n\right)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
   ☺ *On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.*

2) Nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+\cos n}$.

3) Convergence et limite de la suite de terme général $u_n=\prod_{k=2}^{n}\left(2-\sqrt[k]{3}\right)$.

4) Calculer $\int_0^1 x^{3n+1}dx$. En déduire la nature de $\sum\dfrac{(-1)^n}{3n+2}$ et calculer sa somme.

Chapitre 2

1) Montrer que l'application *N* qui, à tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, associe $N\left((x,y)\right)=|x|+|x+2y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter la sphère unité pour cette norme.

2) On pose $E=C^1\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ et on définit sur *E* l'application *N* par $N(f)=|f(0)|+\sup\limits_{t\in[0,1]}|f'(t)|$ et on note N_∞ la norme infinie sur *E* ($N_\infty(f)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$).
   a. Montrer que *N* est une norme sur *E*.
   b. Montrer que $\overline{B}_N(0,1)\subset\overline{B}_{N_\infty}(0,1)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
   c. Existe-t-il $f\in\overline{B}_N(0,1)$ telle que $N_\infty(f)=1$ (soit $f\in S_{N_\infty}(0,1)$) ?

3) On pose $E=C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ et on définit sur *E* l'application *N* par $N(f)=\int_0^1(1+t^2)|f(t)|dt$ et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur *E* ($\|f\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$).
   a. Montrer que *N* est une norme sur *E*.
   b. Trouver le plus petit réel β tel que pour toute $f\in E$, $N(f)\leq\beta\|f\|_\infty$.
   c. Montrer qu'il n'existe pas de réel α strictement positif tel que pour toute $f\in E$, $\alpha\|f\|_\infty\leq N(f)$.

4) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices carrées d'ordre *n*, inversibles et qui converge vers une matrice *A* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice *B*. Montrer qu'on a alors .

Chapitre 3

1) Soient $\left(E,\|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et *a* un vecteur non nul de *E*. On note *f* l'application de *E* dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}\|x-a\| & \text{si } \|x\|\leq\|a\|\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
   a. Montrer que *f* est continue en *a*.
   b. Montrer que *f* n'est pas continue en – *a*.

2) Soient $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et a un vecteur de E.

Montrer que l'application définie sur E par : $x \mapsto \|x\| a$, est lipschitzienne.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^2 = M\}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La partie P est-elle bornée ? ☺ *On pourra considérer les matrices* $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$

a. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.

b. Montrer que f n'est pas continue à l'origine.

☺ *On pourra considérer la restriction de f à la parabole d'équation* $y = x^2$.

Chapitre 4

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = \sin x \cos^n x$ et $f_n(x) = x g_n(x)$.

Etudier les variations de g_n sur $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Etudier la convergence simple, uniforme sur I de la suite de terme général f_n puis la convergence simple, uniforme, normale sur I de la série $\sum f_n$.

2) Donner le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$.

Etudier la continuité, puis le caractère C^1 de f.

3) On pose $I =]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in I$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} \right)$.

a. Montrer la fonction S est définie sur I.

b. Montrer la fonction S est continue sur tout segment inclus dans I. Est-elle continue sur I ?

c. La série S converge-t-elle normalement sur I ?

d. Calculer $S(x+1) - S(x)$. Donner un équivalent de $S(x)$ en -1^+.

4) Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n \ln n}$.

a. Donner le domaine D sur lequel la série $\sum u_n$ converge simplement.

b. Montrer $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D.

c. Montrer que pour $x \geq 1$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. En déduire que la fonction $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ est continue sur D.

Chapitre 5

1) Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+4n-1}{n+2} x^n$.

2) Montrer que si $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de de l'équation différentielle (E): $4xy''+2y'+y=0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$.

Trouver le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$. Que peut-on conclure ?

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$ et donner les solutions développables en série entière de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$. A l'aide des développements en série entière connus, on donnera une expression compacte de ces solutions sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $x \mapsto \sin\sqrt{x}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Donner le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Montrer que *f* vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$ et en déduire *f* à l'aide des fonctions usuelles.

4) Etudier la parité de $f : x \mapsto e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

Montrer que *f* est développable en série entière et donner son développement.

☺ *On pourra montrer que* $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ *et on donne* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} u \, du = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Chapitre 6

1) Donner le rang de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \sin(i+j)$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$.

2) Soient *f* et *g* deux endomorphismes d'un espace vectoriel *E* de dimension finie, tels que :

$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g .$$

Montrer que ces sommes sont directes.

3) Existe-t-il une matrice *B* telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

4) Soit *E* un espace vectoriel, *f* et *g* deux endomorphismes de *E* tel que $f \circ g = id_E$.
   a. Montrer que $\ker g\circ f = \ker f$.
   b. Montrer que $\operatorname{Im} g\circ f = \operatorname{Im} g$.
   c. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires dans *E*.
   d. Déterminer un espace vectoriel *E* et deux endomorphismes *f* et *g* de *E* tel que $f\circ g = id_E$ et $g \circ f \neq id_E$.

5) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, et $H = \{P\in\mathbb{R}_n[X], P'(1)=P(1)=0\}$.
   a. Justifier que *H* est un sous-espace vectoriel de *E*.
   b. Soit $P_n = X^n - nX - 1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P_n par P_2.
   c. Montrer que $E = H \oplus \mathbb{R}_1[X]$. En déduire la dimension de *H*.

6) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $A,B,C,D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. On suppose M, A et D inversibles.

   Exprimer M^{-1} sous forme de blocs.

7) Soient E un espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\ker u=\operatorname{Im} u$.

   a. Montrer que $\dim E=2p$ avec $p\in\mathbb{N}^*$.

   b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ 0_p & 0_p\end{pmatrix}$.

Chapitre 7

1) Calculer $\Delta_n=\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & & \vdots \\ 0 & -x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}_n$.

2) Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j}=1+\delta_{i,j}a_i$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$.

   Montrer que $\det A=\prod_{i=1}^n a_i+\sum_{k=1}^n\prod_{i=1,i\neq k}^n a_i$.

3) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall\, X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+X)=\det X \iff A=0_n.$$

   ☺ *Pour le sens direct, on pourra supposer que A a une colonne non nulle, C_j (la $j^{\text{ième}}$ colonne).*

4) Donner les valeurs propres de $A=\begin{pmatrix} 2a & b & c & d \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $(a,b,c,d)\neq(0,0,0,0)$.

5) Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$. Exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A.

Chapitre 8

1) Donner les éléments propres de $A=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2\end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $a\neq 0$.

   A est-elle diagonalisable ?

2) La matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ avec $a\in\mathbb{R}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

3) On veut résoudre l'équation $M^2=A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

   Montrer que A n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la trigonaliser.

   Montrer que le spectre de $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2=A$ est inclus dans $\{-1,0,1\}$.

   Estimer la dimension des sous-espaces propres correspondants. Montrer que 0 est valeur propre de M.

   Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, solutions de $M^2=A$.

4) Soit A de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$, inversible, telle que $A^3-3A^2+2A=0_6$ et $Tr(A)=8$.
   a. Justifier que A est diagonalisable.
   b. Que peut-on dire des valeurs propres de A ?
   c. Donner une matrice D diagonale, semblable à A.
   d. Donner tous les polynômes annulateurs de A.

5) Donner le rang, le noyau, l'image et les éléments propres de $A\in\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ qui a des 1 sur la diagonale, la première et la dernière colonne, et des 0 partout ailleurs.

6) Montrer que l'application *f* donnée par $f(P)=P(1)X-P(3)(25-X^2)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Donner son noyau et son image. Déterminer ses valeurs propres.

7) A quelle condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) sur a,b,c,d,e,f la matrice $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ 0 & a & e & f\\ 0 & 0 & g & h\\ 0 & 0 & 0 & g\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

8) On note $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et ϕ l'endomorphisme définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\phi(M)=MP$.
   Donner, si possible sans calcul, la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis son noyau et son image. Le diagonaliser, toujours sans calcul.

9) Montrer que *f*, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M)=M+2\,{}^tM$ est un endomorphisme.
   Déterminer ses valeurs propres. Est-il diagonalisable ? Calculer sa trace et son déterminant.

Chapitre 9

1) Dans chacun des cas suivants, montrer que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.
   a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}_n[X]$; $t\mapsto P(tX)$ où P est un polynôme fixé de $\mathbb{K}_n[X]$.
   b. $f:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $t\mapsto A(t)B$ où A est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B est une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   c. $f:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $t\mapsto A(t)B(t)$ où A et B sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   d. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$; $t\mapsto Tr\left(A(t)\right)$ où A est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   ☺ *Utiliser les applications composantes de f suivant la base canonique de l'espace considéré.*

2) Etudier la dérivabilité de la fonction F, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x)=\int_0^x \ln(1+xt)\,dt$. ☺ *Poser* $u=xt$.

3) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f:\mathbb{R}\to E$ dérivable en 0 et telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(2x)=2f(x)$. Montrer que *f* est linéaire.

4) Etudier les arcs paramétrés suivants (asymptotes, points stationnaires, points multiples) :

$$f:t\mapsto\begin{cases} x(t)=t^2+\dfrac{2}{t}\\ y(t)=t+\dfrac{1}{t}\end{cases}\qquad g:t\mapsto\begin{cases} x(t)=\cos(3t)\\ y(t)=\sin(2t)\end{cases}\qquad c:t\mapsto\begin{cases} x(t)=a(t-\sin t)\\ y(t)=a(1-\cos t)\end{cases}\text{ avec } a>0.$$

   Quelle est la longueur d'une arche de c ?

Chapitre 10

1) Pour quels réels a et b, l'intégrale $I=\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}\right)dt$ converge-t-elle ?

   En cas de convergence, calculer I.

2) Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty}\left(1-t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$, puis la calculer à l'aide du calcul de $\int_0^{x} t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt$.

3) Nature selon $a\in\mathbb{R}$ de $\int_0^{+\infty} x^a\ln(x+e^{ax})\,dx$.

4) Montrer que $f:x\mapsto\int_x^{2x}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. Déterminer ses limites en 0 et + ∞. La fonction *f* est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

5) Déterminer l'ensemble de définition D de $F:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{x^2+t^2}dt$. Calculer $F(1)$ (*on pourra poser* $u=\frac{1}{t}$) et en déduire $F(x)$.

Chapitre 11

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n:t\mapsto\frac{\sin(nt)}{1+nt+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\,dt$.

2) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}$ pour $x\in\mathbb{R}_+$. Montrer l'existence de $J=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx$, puis que $J=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}$.

3) Montrer que $\int_0^1 x^x dx=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

4) Donner l'intervalle de définition de $f:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$.

   Quelle est la limite de *f* en + ∞ ? Montrer que *f* est continue sur $\mathbb{R}_+$, puis qu'elle est de classe C^1 sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>0$. En déduire que *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Trouver une équation différentielle vérifiée par *f*.

5) Donner le domaine de définition de $f:x\mapsto\int_0^1\frac{t^x-1}{1+t}dt$ et étudier sa monotonie.

   Calculer $f(x+1)+f(x)$. Déterminer la limite et un équivalent de *f* en -1^+ et + ∞.

6) Montrer que $f:x\mapsto\int_0^1\frac{(t-1)t^x}{\ln t}dt$ est définie sur $D=\,]-1,+\infty[$.

   Prouver que *f* est de classe C^1 sur D et en trouver une expression simple.

Chapitres 12-13-14

1) On donne une variable aléatoire X telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

   Trouver trois réels *a*, *b* et *c* tels que $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}$.

   On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que tel que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $P(X=k)=\dfrac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}$. Déterminer α.

   La variable X admet-elle une espérance ? une variance ? Si oui, la (les) calculer.

2) *n* personnes lancent simultanément *n* pièces équilibrées.

   Déterminer la probabilité qu'une personne au moins n'ait pas le même résultat que les autres.

   On note *X* la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour qu'au moins une personne n'ait pas le même résultat que les autres. Déterminer l'espérance et la variance de *X*.

3) Deux variables aléatoires indépendantes *X* et *Y* suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs *a* et *b*.

   Trouver la loi suivie par leur somme, d'abord en utilisant la somme des probabilités, puis en utilisant les fonctions génératrices.

   Application : Calculer $\dfrac{Cov(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)}$ avec $U=X+Y$ et $V=X-Y$.

4) On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 52. Chaque carte tirée rapporte sa valeur en points, le valet valant 11 points, la dame 12, le roi 13.

   On note respectivement *X* et *Y* les variables aléatoires représentant le nombre de points de la carte de plus basse et de plus haute valeur tirées.

   Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y), les lois marginales et la covariance.

5) On lance une pièce équilibrée une infinité de fois et on note X_n la variable aléatoire valant 1 si on obtient pile au $n^{\text{ième}}$ tirage et 0 sinon. On obtient ainsi une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On note *T* la variable aléatoire égale au plus petit entier *n* tel qu'on ait deux 1 consécutifs aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ tirages.

   On définit les évènements :

   A_n = « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des *n* premiers tirages et $X_n=0$ » ;

   B_n = « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des *n* premiers tirages et $X_n=1$ ».

   On pose $p_n=P(A_n)$ et $q_n=P(B_n)$.

   a. Calculer $P(T=1)$ et $P(T=2)$.

   b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix}p_{n+1}\\ q_{n+1}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_n\\ q_n\end{pmatrix}$, puis calculer p_n et q_n.

   c. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(T=n)=\dfrac{F_n}{2^{n+1}}$ où $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci ($F_0=0$ et $F_1=1$).

6) Deux variables aléatoires indépendantes *X* et *Y* suivent une loi géométrique de paramètres respectifs *p* et *q* dans $]0,1[$. On pose $Z=\min(X,Y)$.

   Pour $n\in\mathbb{N}^*$, donner $P(X>n)$. Donner la loi de *Z* et son espérance.

7) On note S_n la somme de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0,1\right[$.

Donner l'espérance et la variance de $\frac{1}{n} S_n$.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, établir que $P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

Quel résultat de cours ne retrouve-t-on quand n tend vers l'infini ?

8) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, réels strictement positifs.

Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Pariez-vous que X est pair ou impair ?

9) On lance une infinité de fois une pièce qui donne pile avec une probabilité $p \in \left]0,1\right[$.

On définit les évènements A : « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers » et B : « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 3 ».

Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

10) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant toutes deux une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $M = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}$.

Quelle est la probabilité que M soit inversible ? Qu'elle admette 1 pour valeur propre ? Quelle soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

11) Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, soit un système complet d'évènements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ (avec $n \geq 2$) tel que $P(A_1) = \frac{1}{2n}$ et $\left(P(A_i)\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est arithmétique.

Déterminer $P(A_i)$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Déterminer $P(B)$ où B est un évènement tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(B \mid A_i) = \frac{i}{2n}$.

12) Une poule pond un nombre N d'œufs suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. K d'entre eux éclosent avec une probabilité $p \in \left]0,1\right[$, de manière indépendante les uns des autres.

Donner l'ensemble des valeurs prises par N, la probabilité de $K = k$ sachant que n œufs ont été pondus et en déduire la loi de K.

13) On lance n fois 2 dés non truqués A et B. On note X la variable aléatoire associée au nombre de fois où le chiffre de A est strictement supérieur à celui de B.

Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev.

Exprimer $p_n = P\left(0,9 \leq \frac{X}{E(X)} \leq 1,1\right)$ à l'aide de $|X - E(X)|$ et trouver n tel que $p_n \geq 0,99$.

14) c chasseurs se trouvent face à ℓ lapins munis de fusils à carottes. Les lapins touchent les chasseurs indépendamment avec une probabilité $p \in \left]0,1\right[$.

On note X_i l'indicatrice de l'évènement C_i : « le i-ème chasseur est touché » et T la variable aléatoire représentant le nombre de chasseurs touchés par les lapins.

Déterminer la loi de T et la probabilité que C_i se produise.

Chapitre 15

1) Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose :

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt .$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur *E*.

2) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt, la famille (u,v,w) avec $u=(1,0,1)$, $v=(1,1,1)$ et $w=(-1,1,0)$.

3) Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire canonique, déterminer l'orthogonal de :

$$F = \left\{(X^2 - X)P,\ P \in \mathbb{R}_1[X]\right\}.$$

4) Soient *E* un espace euclidien et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs unitaires de *E*.

Montrer que si, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de *E*.

5) Soient *F* et *G* deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien *E*.

Exprimer $(F \cup G)^\perp$ en fonction de $F^\perp$ et $G^\perp$.

Chapitre 16

1) Soient *E* un espace euclidien, *k* un réel et *a* un vecteur unitaire de *E*.

Montrer que $u : x \mapsto k(a \mid x)a + x$ est un endomorphisme symétrique de *E*.

En écrivant sa matrice dans une base bien choisie de *E*, déterminer la ou les valeur(s) de *k* pour la(les)quelle(s) *u* est un automorphisme orthogonal. Caractériser cette isométrie.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $A^2 = {}^tA$.

   a. Trouver un polynôme annulateur de *A*.

   b. On suppose que $0 \in Sp(A)$. Déterminer $Sp(A)$.

   c. Montrer que *A* est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec une matrice de passage orthogonale.

3) Montrer que $f : P \mapsto 2XP' + (X^2-1)P''$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (où *n* est un entier supérieur ou égal à 2). En donner les valeurs propres.

Montrer que *f* est symétrique pour le produit scalaire $(P,Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} PQ$.

4) Donner le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer son noyau et son image, une base orthogonale du noyau et de l'image, puis montrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$.

Diagonaliser *M*. De quel endomorphisme s'agit-il ?

Montrer que $A = I_4 + M$ est inversible, que $\left(A^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice d'un endomorphisme que l'on déterminera.

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de *s*, la symétrie orthogonale par rapport à $\operatorname{Im} M$.

5) Déterminer $\left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}),\ A \text{ orthogonale}\right\}$.

6) Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on note s la symétrie orthogonale par rapport à :

$$P:\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$$

Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

7) Soient un entier $n \geq 2$ et $u : M \mapsto -M + tr(M)I_n$ défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Prouver que -1 est valeur propre de u. Trouver une base de $E_{-1}(u)$, le sous-espace propre associé.

Montrer que u est diagonalisable. Déterminer $\det u$ et $tr(u)$.

Donner un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel u est un endomorphisme symétrique.

Trouver une base orthonormale de vecteurs propres de u pour ce produit scalaire.

8) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que ${}^tAA = A\,{}^tA$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = 0_n$.

Montrer que ${}^tAA = A\,{}^tA = 0_n$ puis que $A = 0_n$.

9) On donne $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $\sigma = ab+bc+ca$ et $s = a+b+c$.

Montrer que M est orthogonale si et seulement si $\sigma = 0$ et $|s| = 1$.

Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $s = 1$.

Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$, a, b et c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$.

Chapitre 17

1) Montrer que l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique est une rotation. Préciser ses éléments caractéristiques.

2) Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $X_m \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour lequel $\inf\limits_{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|$ est atteint.

3) Montrer que $P : x+y+z=0$ et $D : x=y=z$ sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur P.

4) Montrer que f, de matrice $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est un endomorphisme orthogonal indirect. Quelle est la nature de cette isométrie ? En donner les caractéristiques.

On note g la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe D dirigé et orienté par $(1,1,0)$. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer l'image du plan $P : x+y+z=0$ par $g \circ f$.

Chapitre 18

1) Donner le développement en série entière de la fonction *sh*.

   Trouver une solution développable en série entière de $tx''+2x'-tx=0$, puis une autre solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Résoudre (E) : $x(x^2-1)y'+2y=x^2$ sur des intervalles où les solutions existent.

   Existe-t-il une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont la restriction aux intervalles précédents est solution de (E) ?

3) Résoudre $xy'-(1+\lambda)y=0$ pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

   En déduire les éléments propres de $\phi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$, défini par $\phi(P)=XP'-P$.

4) Développer $\sin(x-t)$, puis montrer que si g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $f : x\mapsto\int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

   Montrer que *f* est solution de $y''+y=g$, puis résoudre cette équation différentielle pour $g(t)=e^t$.

5) Résoudre (S) : $\begin{cases} x'(t)=2x(t)+y(t) \\ y'(t)=2y(t) \\ z'(t)=2x(t)-3y(t)+4z(t) \end{cases}$.

Chapitre 19

1) Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

   a. $f:(x,y)\mapsto\begin{cases} \dfrac{x\sin^2 y}{x^2+y^2} & \text{quand } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{quand } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

   b. $g:(x,y)\mapsto\begin{cases} \dfrac{x^p y^q}{x^2+y^2} & \text{quand } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{quand } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ avec $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.

2) Déterminer les extrema de $f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2+2xyz$.

3) Montrer que $f:(x,y)\mapsto x^2y+\ln(1+y^2)$ possède un minimum et un maximum sur $A=[-1,1]^2$.

   Montrer que *f* possède un point critique sur $B=]-1,1[^2$.

   La valeur $f(0,0)$ est-elle un extremum de *f* (on pourra calculer $f(x,x^3)$) ?

   Trouver le minimum et le maximum de *f* sur *A*.

4) Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

   en effectuant le changement de variables $\varphi(x,y)=(x,x^2+y)$.

Chapitre 20

Dans ce qui suit, l'espace affine est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) (*St Cyr PSI*) Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\ ;\ (x,y,z)\mapsto\dfrac{\arctan(xyz)}{1+(xyz)^2}-\dfrac{\pi}{8}$.

   Donner une équation du plan tangent en $(1,1,1)$ à la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$.

2) Donner la représentation, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection *f*, sur le plan *P* d'équation $z=0$, parallèlement à *D*, dirigée par $\overrightarrow{OS}$ avec $S(1,-1,1)$.

   On note $\mathscr{E}$ l'image par *f* du cercle $\mathscr{C}$ d'équations $\begin{cases}x^2+z^2=1\\ y=0\end{cases}$.

   Montrer que $\mathscr{E}$ a pour équation $x^2+2y^2+2xy=1$ dans le plan *P* rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Soient l'application $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2-2x^2y^2$ et *S* la surface de l'espace d'équation $z=f(x,y)$.

   Montrer que *S* est invariante par quatre réflexions que l'on donnera.

   Trouver les points critiques de *f* et déterminer les extremums locaux ou globaux de *f* sur $\mathbb{R}^2$.

4) Soit la surface *S* de l'espace d'équation cartésienne $x^2+2y^2+z^2=1$.

   Déterminer tous les plans tangents à *S* passant par le point *A* de coordonnées $(1,1,0)$.

   Déterminer tous les plans tangents à *S* contenant la droite *D* d'équations $\begin{cases}x=y\\ z=0\end{cases}$.

5) Reconnaitre la surface *S* de l'espace d'équation cartésienne $(x-2)^2+y^2+z^2=1$.

   Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on note $D(\lambda)$ (si elle existe) la droite horizontale passant par le point $A(\lambda)$, de coordonnées $(0,0,\lambda)$ et qui coupe *S* une seule fois.

   Que dire des droites $D(\lambda)$? En existe-t-il pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$?

   Donner une équation cartésienne de la réunion de ces droites quand λ décrit $\mathbb{R}$.