Résumé du chapitre 12 : Espaces probabilisés

I - Ensembles dénombrables

Définition :

Un ensemble est dit dénombrable s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est dénombrable si l'ensemble $\{x_i, i\in I\}$ est dénombrable.

Propriété :

Un ensemble dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$.

Propriétés : (***non mentionnées dans le programme***)

- Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.
- Si un ensemble peut être mis en bijection avec un ensemble dénombrable, alors il est dénombrable.
- La réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

Propriété :

Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

II - Espace probabilisé

II-1. Tribu et univers

Définitions :

Soit Ω un ensemble.

On appelle tribu sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

i. $\Omega\in\mathcal{A}$;
ii. pour tout $A\in\mathcal{A}$, $\overline{A}=\Omega\setminus A\in\mathcal{A}$;
iii. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

L'ensemble Ω est appelé univers.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés événements.

Un système complet dénombrable d'événements est une famille dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements non vides, incompatibles deux à deux et telle que $\bigcup_{i\in I} A_i=\Omega$.

Propriétés : (***non mentionnées dans le programme***)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements. On a :

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}.$$

Propriétés :

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω.

- $\varnothing \in \mathcal{A}$.
- Toute réunion ou intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, autrement dit, toute intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.

Langage probabiliste	***langage ensembliste***
univers	ensemble
tribu	ensemble de parties (vérifiant certaines propriétés)
issue	élément
évènement	partie ou sous-ensemble
évènement élémentaire	singleton
évènement impossible	$\varnothing$
évènement certain	ensemble entier
évènement contraire	complémentaire
évènements incompatibles	parties disjointes
A et B	$A\cap B$
A ou B	$A\cup B$
système complet d'événements	partition

II-2. Loi de probabilité

Définitions :

Si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, on appelle loi de probabilité ou probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$, une application $P:\mathcal{A}\to[0;1]$ telle que :

i. $P(\Omega)=1$.

ii. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements incompatibles deux à deux, $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega,\mathcal{A},P)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et P une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$.

Un évènement quasi-certain est un évènement de probabilité 1.

Un évènement quasi-impossible est un évènement de probabilité 0.

Dans toute la suite, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Propriétés : (***non mentionnées dans le programme de 2ème année, mais mentionnées dans celui de 1ère année***)

Soit A et B deux événements de Ω. On a :

- Si A et B sont incompatibles ($A\cap B=\varnothing$), alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
- $A\subset B \quad\Rightarrow\quad P(A)\le P(B)$

Propriétés :

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de Ω.

- *Continuité croissante* : Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

- *Continuité décroissante* : Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Corollaires :

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements de Ω. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\in[\![0,n]\!]} A_k\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k\in[\![0,n]\!]} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

Propriété : *Sous-additivité*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de Ω telle que $\sum P(A_n)$ converge. On a :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

III - Conditionnement et indépendance

III-1. Probabilité conditionnelle

a. Définition :

Définition :

Si A et B sont deux événements tels que $P(B)>0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel :

$$P_B(A) = P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Propriété et définition :

L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ appelée probabilité conditionnée à B.

Propriété : *Formule des probabilités composées*

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ une famille d'évènements. On a :

$$P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_m) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{m-2}}(A_{m-1})P_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{m-1}}(A_m).$$

b. <u>Formule des probabilités totales</u> :

<u>Définition</u> :

Une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements est un <u>système complet dénombrable d'événements</u> si les A_n sont deux à deux disjoints et leur réunion est Ω.

<u>Propriété</u> : Formule des probabilités totales

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements. La série $\sum P(A_n \cap B)$ converge et :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(B) .$$

<u>Corollaires</u> : Formules de Bayes

- Si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)} .$$

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et si B est un événement tel que $P(B) > 0$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$P_B(A_N) = \frac{P(A_N)P_{A_N}(B)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B)} .$$

III-2. <u>Indépendance</u>

a. <u>Couple d'événements indépendants</u> :

<u>Définition</u> :

Deux évènements A et B sont <u>indépendants</u> si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

<u>Propriété</u> :

Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P_B(A) = P(A)$.

<u>Propriété</u> : (***non mentionnée dans le programme***)

Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ le sont.

b. <u>Famille finie d'événements mutuellement indépendants</u> :

<u>Définitions</u> :

Soit $(A_i)_{1\le i\le n}$ une famille d'évènements. On dit que $A_1,\dots,A_n$ sont <u>mutuellement indépendants</u> si pour tout $p \in [\![2,n]\!]$ et tout $(i_1,i_2,\dots,i_p) \in [\![1,n]\!]^p$ tel que $i_1 < i_2 < \dots < i_p$:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_p}) .$$

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements. On dit que les A_i sont <u>mutuellement indépendants</u> si les éléments de toute sous-famille finie de $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants.