Résumé du chapitre 15 : Espaces préhilbertiens réels

E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire de E et $\|.\|$ est la norme associée.

I – Produit scalaire

I-1. Définition

Définition :

On appelle produit scalaire sur E toute application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui est bilinéaire, symétrique, définie et positive, c'est-à-dire :

- φ est *bilinéaire* : Pour tout $(x,x',y,y')\in E^4$ et tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(\lambda x+\mu x',y)=\lambda\varphi(x,y)+\mu\varphi(x',y)$$
$$\varphi(x,\lambda y+\mu y')=\lambda\varphi(x,y)+\mu\varphi(x,y')$$

- φ est *symétrique* : Pour tout $(x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$.
- φ est *positive* : Pour tout $x\in E$, $\varphi(x,x)\geq 0$.
- φ est *définie* : Pour tout $x\in E$, $\varphi(x,x)=0 \iff x=0$.

Notations : Quand ce n'est pas ambigu, on note souvent $\varphi(x,y)=(x\mid y)$ ou $\langle x\mid y\rangle$ ou $\langle x,y\rangle$, voire $x\cdot y$.

Produits scalaires usuels :

1) Dans $\mathbb{R}^n$, si $(x\mid y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n={}^tXY$, avec $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, et *X* et *Y* sont les vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ correspondants à *x* et *y*. C'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
2) Dans $C([a,b],\mathbb{R})$, $(f\mid g)=\int_a^b fg$.
3) Dans $\mathbb{R}[X]$, $(P\mid Q)=\int_0^1 PQ$ est un produit scalaire.
4) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A\mid B)=Tr({}^tAB)=\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}b_{i,j}$ avec $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$.

   C'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I-2. Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens

Définition :

Un espace préhilbertien réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Si de plus, cet espace est de dimension finie, alors c'est un espace euclidien.

I-3. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Propriété :

Pour tout $(x,y)\in E^2$, on a : $|(x\mid y)|\leq\sqrt{(x\mid x)(y\mid y)}$.

Et on a égalité si et seulement si la famille (x,y) est liée (*x* et *y* colinéaires).

I-4. Norme hilbertienne ou euclidienne

Théorème et définition :

Si E est muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, alors l'application $N : x \mapsto \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E, appelée norme hilbertienne (quand E est préhilbertien) ou euclidienne (quand E est euclidien) associée au produit scalaire.

Propriété :

Pour $(x, y) \in E^2$, on a $N(x+y) = N(x) + N(y)$ si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens.

I-5. Identités de polarisation

Propriétés :

Si E est muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ de norme associée $\|\cdot\|$, on a, pour tout $(x, y) \in E^2$:

- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$.
- $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x \mid y)$.
- $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x \mid y)$.
- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (*identité du parallélogramme*).
- $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|^2 = \dfrac{1}{4}\left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ (*théorème de la médiane*).

II – Orthogonalité

II-1. Vecteurs orthogonaux, vecteurs unitaires

Définitions :

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $(x \mid y) = 0$, on note alors $x \perp y$.

Un vecteur x de E est dit unitaire s'il est de norme 1.

Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est orthogonale si pour tous vecteurs distincts x, x' de $\mathcal{F}$, on a $(x \mid x') = 0$ (autrement dit si les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont orthogonaux deux à deux).

Une famille de vecteurs de E est orthonormale ou orthonormée si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires.

Propriété :

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

Propriété : *Relation de Pythagore.*

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors :

$$\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_p\|^2 = \|x_1 + x_2 + \ldots + x_p\|^2 .$$

Et, dans le cas de deux vecteurs, la réciproque est vraie : si $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$ alors $x \perp y$.

II-2. Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définitions :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F et G sont orthogonaux si pour tout $(x, y) \in F \times G$, $(x \mid y) = 0$.

Si A est une partie non vide de E, l'ensemble $\left\{ x \in E \setminus \forall\, a \in A, (a \mid x) = 0 \right\}$ est appelé orthogonal de A, noté $A^{\perp}$.

Propriétés : (***non mentionnées dans le programme***)

Si A est une partie non vide de E.

- $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si B est une autre partie non vide de E telle que $A \subset B$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$
- $A^{\perp} = (Vect\, A)^{\perp}$.
- $A \cap A^{\perp}$ est vide si A ne contient pas 0 et réduit à $\{0\}$ sinon.

II-3. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Propriété : *Procédé ou algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

Si $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une famille libre de E, alors il existe une famille orthonormée de E, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Vect(e_1, e_2, \dots, e_k) = Vect(f_1, f_2, \dots, f_k)$.

II-4. Bases orthonormales

Dans toute la fin de la partie II, E est euclidien de dimension n non nulle.

Propriétés et définition :

Toute famille orthogonale de n vecteurs non nuls de E est une base de E.

Toute famille orthonormée de n vecteurs de E est une base de E. Une telle famille est appelée base orthonormale ou orthonormée (b.o.n.) de E.

Théorème :

E possède des bases orthonormales et si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une telle base, alors pour tout $x \in E$:

$$x = (e_1 \mid x) e_1 + (e_2 \mid x) e_2 + \dots + (e_n \mid x) e_n \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = (e_1 \mid x)^2 + (e_2 \mid x)^2 + \dots + (e_n \mid x)^2.$$

Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ sont deux vecteurs de E, on a :

$$(x \mid y) = {}^t X Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

avec $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ et $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$.

Propriété : (***HP ici, chapitre suivant***)

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées de E et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors :

$$P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = {}^t P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Propriété :

Toute famille orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ peut être complétée en une base orthonormale de *E*.

Propriétés : (***non mentionnées dans le programme***)

Soit *F* un sous-espace de *E*.

- $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$.
- $F \oplus F^{\perp} = E$.
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Notation : Si *F* et *G* sont deux sev (supplémentaires ou non) tels que $F \perp G$, leur somme (directe) est notée :

$$F \overset{\perp}{\oplus} G.$$

II-5. Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie

Définitions : (***Dans le programme en dimension 2 ou 3 uniquement***)

Si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$, on dit que $\mathcal{B}'$ est orientée dans le même sens que $\mathcal{B}$.

Si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$, on dit que $\mathcal{B}'$ est orientée dans le sens contraire à celui de $\mathcal{B}$.

Orienter *E*, c'est choisir une base $\mathcal{B}$ qui donne le sens positif.

Alors, si $\mathcal{B}'$ est une autre base, on dit que $\mathcal{B}'$ est directe si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ et indirecte si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$.

II-6. Produit scalaire et formes linéaires

Propriété :

$f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $a \in E$, unique, tel pour tout $x \in E$, $f(x) = (a \mid x)$.

Autrement dit, toute forme linéaire sur *E* s'écrit de manière unique sous la forme $x \mapsto (a \mid x)$, où *a* est un vecteur fixé de *E*.

Corollaire et définition :

Tout hyperplan *H* de *E* est de la forme $H = \{a\}^{\perp}$ avec $a \in E \setminus \{0\}$.

Un tel vecteur *a* est appelé vecteur normal à *H*.