Résumé du chapitre 16 : Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel préhilbertien réel. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire de E et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

I – Projections orthogonales

I-1. <u>Projection orthogonale</u>

<u>*Théorème et définition*</u> :

Soit *F* un sous-espace vectoriel de *E*, *F* de dimension finie.

$$\forall\, x \in E,\ \exists!\, x_F \in F \setminus x - x_F \in F^{\perp}.$$

Le vecteur x_F est appelé <u>projeté orthogonal</u> de *x* sur *F* et l'application p_F de *E* dans *E*, qui à *x* associe x_F est linéaire et est appelée <u>projection orthogonale sur *F*</u>.

<u>*Propriété*</u> :

Soient *F* un sous-espace de dimension finie de *E* et p_F la projection orthogonale sur *F*.

Si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base orthonormale de *F*, alors pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = (e_1 | x)e_1 + (e_2 | x)e_2 + ... + (e_p | x)e_p.$$

<u>*Propriétés*</u> :

Soit *F* un sous-espace de dimension finie de *E*.

- $F \oplus F^{\perp} = E$.
- La projection orthogonale sur *F* est le projecteur sur *F* parallèlement à $F^{\perp}$.

<u>*Propriété*</u> : *Inégalité de Bessel*

Soient *F* un sous-espace de dimension finie de *E* et p_F la projection orthogonale sur *F*.

Pour tout $x \in E$, on a :

$$\|p_F(x)\| \le \|x\|$$

avec égalité si et seulement si $x \in F$.

I-2. <u>Distance à un sous-espace vectoriel</u>

<u>*Propriété et définition*</u> :

Soient *A* une partie non vide de *E* et $x_0 \in E$.

L'ensemble $\left\{\|a - x_0\| \setminus a \in A\right\}$ admet une borne inférieure appelée <u>distance de x_0 à *A*</u>, notée $d(x_0, A)$.

<u>*Propriété*</u> :

Si *F* est un sous-espace de dimension finie de *E*, et p_F est la projection orthogonale sur *F*, alors pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$

II – Isométries vectorielles

Dans cette partie, E est euclidien.

II-1. Généralités

Définitions :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

L'endomorphisme *f* est un automorphisme orthogonal de *E* s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \big(f(x) \mid f(y)\big) = (x \mid y).$$

L'endomorphisme *f* est une isométrie de *E* s'il conserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|f(x)\| = \|x\|.$$

Propriété :

Un automorphisme orthogonal est un automorphisme.

Propriété : (***non mentionnées dans le programme***)

Les symétries orthogonales sont des automorphismes orthogonaux.

Théorème :

Les isométries de *E* sont les automorphismes orthogonaux de *E*.

Définition :

L'ensemble des isométries de *E* est appelé groupe orthogonal de *E*, noté $O(E)$.

Propriété :

La composée de deux isométries est une isométrie et la réciproque d'une isométrie est une isométrie.

Propriété :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $f \in O(E)$ si et seulement si *f* transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

Propriété :

Soit $f \in O(E)$. Si *F* est un sous-espace de *E* stable par *f*, alors $f(F) = F$ et $f(F^\perp) = F^\perp$.

II-2. Matrices orthogonales

Dans cette partie $\mathbb{R}^n$ *est muni de son produit scalaire canonique.*

Définition :

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à *M* est un automorphisme orthogonal. On note $O(n)$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété : *Caractérisation des matrices orthogonales*

$$M \in O(n) \quad \Leftrightarrow \quad {}^tMM = I_n \quad \Leftrightarrow \quad M\,{}^tM = I_n.$$

Propriété :

$M \in O(n)$ si et seulement si ses colonnes (assimilés à des vecteurs de $\mathbb{R}^n$) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Propriété :

Un endomorphisme *f* de *E* appartient à $O(E)$ si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de *E* est orthogonale.

Propriété :

$O(n)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

II-3. Groupe spécial orthogonal

Propriété :

Pour tout $M \in O(n)$, $\det M = \pm 1$.

Définitions :

L'ensemble des matrices de $O(n)$ dont le déterminant vaut 1 est appelé groupe spécial orthogonal, noté $SO(n)$ (ou $SO_n(\mathbb{R})$). Une matrice de $SO(n)$ est dite matrice orthogonale positive et une matrice de $O(n) \setminus SO(n)$ est dite matrice orthogonale négative.

L'ensemble des automorphismes de *E* orthogonaux de déterminant égal à 1 est appelé groupe spécial orthogonal de E, noté $SO(E)$. Les éléments de $SO(E)$ sont appelés des rotations.

Propriété :

$(SO(n), \times)$ (*resp.* $(SO(E), \circ)$) est un sous-groupe de $(O(n), \times)$ (*resp.* $(O(E), \circ)$).

Propriété : (***non mentionnées dans le programme***)

Soit *s* une symétrie orthogonale de *E* par rapport à un sous-espace *F*.

$$s \in SO(E) \iff \dim F^{\perp} \text{ est paire.}$$

Définition : (***non mentionnées dans le programme***)

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée réflexion.

II-4. Changement de base orthonormale

Propriété :

Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de *E*, $\mathcal{B}'$ une autre base de *E* et *P* la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

La base $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée si et seulement si $P \in O(n)$.

De plus, si *E* est orienté et $\mathcal{B}$ est directe, alors $\mathcal{B}'$ est orthonormée directe si et seulement si $P \in SO(n)$.

III – Endomorphismes symétriques

Dans cette partie à nouveau, E est euclidien.

III-1. Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien

Définition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est symétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\big(u(x) \mid y\big) = \big(x \mid u(y)\big).$$

Propriété :

$S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Propriété :

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u est symétrique si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

III-2. Réduction des endomorphismes symétriques : théorème spectral

Théorème : *Théorème spectral*

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.

Corollaire : *Interprétation matricielle du théorème spectral*

Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.