Résumé du chapitre 18 : Equations différentielles linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

On note $E = F\left(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

I - Systèmes différentiels

I-1. Définition

Définitions :

Un système différentiel linéaire d'ordre 1 est un système d'inconnue $X : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, de la forme :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

avec $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux applications continues.

Le système homogène ou sans second membre associé est le système :

$$X' = A(t)X \ .$$

La fonction vectorielle $t \mapsto B(t)$ est le second membre du système.

I-2. Principes de résolution

Théorème : *de Cauchy-Lipschitz*

Soient $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Le problème de Cauchy formé par (S) et la condition initiale $X(t_0) = X_0$ admet une unique solution sur *I*.

Théorèmes :

- L'ensemble des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de *E*, de dimension *n*.
- Si X_p est une solution particulière de (S), l'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble des fonctions de la forme $X_p + X_h$ où X_h est une solution de (H).

Propriété : *Principe de superposition* (***pas dans le programme de seconde année…***)

Si $B = B_1 + B_2$ avec $B_1, B_2 \in C\left(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)$, alors X est solution de (S): $X' = A(t)X + B(t)$ si et seulement si $X = X_1 + X_2$ avec X_i solution (S_i): $X' = A(t)X + B_i(t)$ pour $i \in \{1,2\}$.

Propriété : (***pas dans le programme de seconde année…***)

Si $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*A* est à coefficients réels) et $X : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une solution à valeurs complexes de (H): $X' = A(t)X$ sur *I*, alors $\mathrm{Re}(X)$ et $\mathrm{Im}(X)$ sont des solutions à valeurs réelles de (H) sur *I*.

I-3. Systèmes à coefficients constants

Dans cette partie, on suppose que la matrice A est constante.

a. Cas où A est diagonalisable :

Si A est diagonalisable, alors $A = P^{-1}DP$ avec $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. On a alors :

$$Z' = DZ + C(t)$$

avec $Z = PX$ et $C = PB$. On trouve Z, puis $X = P^{-1}Z$.

Propriété :

> Si A est diagonalisable d'éléments propres $\left((\lambda_k, V_k)\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$, alors la famille $\left(t \mapsto e^{\lambda_k t}V_k\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de (H): $X' = AX$.

b. Cas où A est trigonalisable :

Si A est trigonalisable, alors il existe $T = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{T}_n^{\sup}(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = P^{-1}TP$.

Avec comme ci-dessus $Z = PX$ et on a alors :

$$X' = AX + B(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z' = TZ + C(t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z'_1 = \alpha_{1,1}z_1 + \alpha_{1,2}z_2 + \dots + \alpha_{1,n}z_n + c_1(t) \\ z'_2 = \alpha_{2,2}z_2 + \dots + \alpha_{2,n}z_n + c_2(t) \\ \quad \vdots \\ z'_{n-1} = \alpha_{n-1,n-1}z_{n-1} + \alpha_{n-1,n}z_n + c_2(t) \\ z'_n = \alpha_{n,n}z_n + c_n(t) \end{cases}$$

La dernière équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on sait résoudre : on trouve z_n. On peut alors réinjecter la fonction z_n trouvée dans l'avant-dernière équation que l'on sait alors résoudre : on trouve z_{n-1}. En continuant ainsi (en remontant), on trouve tous les z_k, donc Z, puis $X = P^{-1}Z$.

c. Cas général :

Il faut ici distinguer deux cas : réel ou complexe.

- Dans le cas complexe, toutes matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable et on se retrouve dans le cas de la partie précédente.
- Dans le cas réel, on résout dans $\mathbb{C}$ en trigonalisant A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On trouve les solutions complexes au système (S) et avec la propriété vue plus haut, les parties réelles et imaginaires donnent les solutions réelles.

II - Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Dans toute cette partie, on considère l'équation différentielle :

$$(E): \; y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On note (H): $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ l'équation homogène associée et $S_{(E)}$ (*resp.* $S_{(H)}$) l'ensemble des solutions de (E) (*resp.* de (H)) sur I.

Remarquons que par définition de (E) toute solution y doit être au moins deux fois dérivable, mais comme $y'' = -ay' - by + c$ avec a, b, c, y, y' continues, y est de classe C^2 sur I.

II-1. Résultats généraux

a. Système différentiel associé :

Définition :

Avec $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$, le système $X' = A(t)X + B(t)$ est appelé système différentiel associé à l'équation (E).

Théorèmes :

- L'ensemble $S_{(H)}$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $C^2(I, \mathbb{K})$, de dimension 2.
- L'équation (E) admet des solutions sur *I* et si y_p est une solution particulière de (E), alors :
$$S_{(E)} = \left\{ y_p + y_h \setminus y_h \in S_{(H)} \right\}.$$
- *Théorème de Cauchy-Lipschitz* : Pour $t_0 \in I$ et $(y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy formé par (E) et les conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
- *Principe de superposition* : Si $c = c_1 + c_2$ où c_1 et c_2 sont deux fonctions continues sur *I*, alors une fonction f est une solution de (E) sur I si et seulement si $f = f_1 + f_2$ avec f_1 solution de (E_i) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c_i(t)$ pour $i \in \{1, 2\}$.

b. Retour sur le cas des équations à coefficients constants :

Si *a* et *b* sont des constantes, on retrouve les résultats vus en 1ère année.

II-2. Méthodes de résolution

a. Changement de fonction inconnue avec abaissement de l'ordre de l'équation :

On peut chercher deux fonctions *c* et *d*, avec *c* dérivable et *d* continue sur *I*, telles que $z = y' + cy$ vérifie $z' + dz = y'' + ay' + by = c$.

Une autre technique du même genre est possible si on connait déjà une solution φ de l'équation homogène (H) qui ne s'annule pas sur *I*. On peut alors chercher une autre solution sous la forme $y = z\varphi$.

b. Changement de variable :

Dans certain cas, un changement de variable permet d'aboutir à une équation plus simple (par exemple, à coefficients constants). Si la variable initiale est *t*, on pose $u = \varphi(t)$ avec φ bijective et au moins deux fois dérivable sur *I*. Dans cas, si $t \mapsto y(t)$ est solution, alors on pose $z(u) = y\left(\varphi^{-1}(u)\right)$.

Il faut alors faire attention aux ensembles de définition (par exemple, il faut que *t* varie dans $I \subset \mathbb{R}_+^*$ pour pouvoir poser $u = \ln t$).

c. Recherche de solutions développables en série entière :

Tout est dans le titre… Se placer a priori sur un intervalle $]-R, R[$ avec $R > 0$.