Résumé du chapitre 20 : Applications géométriques du gradient

Dans tout le chapitre, on se place dans l'espace $\mathbb{R}^p$ *avec* $p = 2$ ou 3, *muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée.*

I - Courbes planes

Dans cette partie, $p = 2$ *et* $\mathbb{R}^2$ *sera appelé le plan et on notera* $\mathcal{B}_c = (\vec{i}, \vec{j})$ *sa base canonique et* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *un repère orthonormé correspondant.*

I-1. Définition d'une courbe du plan

On peut définir une courbe du plan de plusieurs façons.

- *Graphe d'une application* $g : I \to \mathbb{R}$: ensemble des points $M\left(x, g(x)\right)$ pour x décrivant $I \subset \mathbb{R}$.
- *Courbe paramétrée* : ensemble des points $M\left(x(t), y(t)\right)$ pour t décrivant $I \subset \mathbb{R}$, $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$.
- *Courbe définie par une équation cartésienne* : ensemble des points $M\,(x, y)$ tels que $f(x, y) = 0$ avec $f : U \to \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}^2$.

Définition :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau de f l'ensemble des points $M\,(x, y)$ tels que $f(x, y) = k$ avec k constante réelle.

Définitions :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ et $M\,(x_0, y_0)$ un point de $\mathscr{C}$.

On dit que M est un point régulier de $\mathscr{C}$ si $\overrightarrow{grad}\, f\,(x_0, y_0) \neq \vec{0}$.

Dans le cas contraire ($\overrightarrow{grad}\, f\,(x_0, y_0) = \vec{0}$), on dit que M est un point singulier de $\mathscr{C}$.

On dit que la courbe $\mathscr{C}$ est régulière si tous ses points sont réguliers.

Propriété : *Paramétrage local de classe* C^1

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ et $M\,(x_0, y_0)$ un point régulier de $\mathscr{C}$.

Il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\vec{\varphi} : I \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1 sur I et telle qu'au voisinage de $M\,(x_0, y_0)$, la courbe $\mathscr{C}$ est paramétrée par $\vec{\varphi}$, soit $\begin{cases} x(t) = \vec{\varphi}(t).\,\vec{i} \\ y(t) = \vec{\varphi}(t).\,\vec{j} \end{cases}$.

I-2. Tangente en un point régulier

Propriété :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ et $M\,(x_0, y_0)$ un point régulier de $\mathscr{C}$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une normale en M dirigée par $\overrightarrow{grad} f\,(x_0, y_0)$ et une tangente d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\left(x - x_0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\left(y - y_0\right) = 0.$$

Propriété :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $f(x, y) = 0$.

En un point régulier $M\,(x_0, y_0)$, le gradient de f est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f, c'est-à-dire qu'au voisinage de $t = 0$, $f\left(x_0 + t\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), y_0 + t\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) - f\left(x_0, y_0\right)$ est signe de t.

II – Surfaces et courbes de l'espace

Dans cette partie, $p = 3$ *et* $\mathbb{R}^3$ *sera appelé l'espace ; on notera* $\mathcal{B}_c = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *sa base canonique et* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *un repère orthonormé correspondant.*

II-1. Définition d'une surface de l'espace

On peut définir une surface de l'espace de plusieurs façons, entre autres par :

- *un paramétrage* : $M\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$ avec $(u,v) \in I \times J \subset \mathbb{R}^2$ et $x, y, z : I \times J \to \mathbb{R}$;
- *une équation cartésienne* : $M\,(x, y, z)$ tels que $f(x, y, z) = 0$ avec $f : U \to \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}^3$.

Définition : (***non mentionnée dans le programme***)

Une surface de révolution d'axe D est une surface $\mathscr{S}$ dont l'image par une rotation d'axe D et d'angle non nul modulo 2π est elle-même.

Définitions :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ et $M\,(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathscr{S}$.

On dit que M est un point régulier de $\mathscr{S}$ si $\overrightarrow{grad} f\,(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$.

Dans le cas contraire ($\overrightarrow{grad} f\,(x_0, y_0, z_0) = \vec{0}$), on dit que M est un point singulier de $\mathscr{S}$.

On dit que la surface $\mathscr{S}$ est régulière si tous ses points sont réguliers.

Définitions :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ et $M\,(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de $\mathscr{S}$.

Le plan passant par $M\,(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{grad} f\,(x_0, y_0, z_0)$ est appelé plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ au point M.

On dit que tout vecteur normal à ce plan est dit normal à la surface en $M\,(x_0, y_0, z_0)$.

II-2. Courbes tracées sur une surface

Définition :

Si $\mathscr{S}$ est une surface de l'espace définie par l'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, alors toute courbe vérifiant cette équation (entre autres) est incluse dans $\mathscr{S}$ et est dite tracée sur la surface $\mathscr{S}$.

Propriété :

Soient $\mathscr{S}$ une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$, avec $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée par $\vec{\varphi} : I \to U$; $t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$, tracée sur $\mathscr{S}$, de classe C^1 et régulière. Enfin, soit $M\,(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de $\mathscr{S}$ tel que $M \in \mathscr{C}$ (donc il existe $t_0 \in I$ tel que $\vec{\varphi}(t_0) = \overrightarrow{OM}$).

Alors, la tangente à $\mathscr{C}$ en M est incluse dans le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M.