TD du chapitre 16 : Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

Exercice 1

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = \alpha_i \alpha_j$.
Montrer que *f*, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à *A*, est un projecteur orthogonal.

Exercice 2

Soit $E = C^1([0;1], \mathbb{R})$. Pour tous *f*, *g* de *E*, on pose :

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

On pose par ailleurs :

$$V = \{f \in E \setminus f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \{f \in E \setminus f \in C^2([0;1], \mathbb{R}) \text{ et } f'' = f\}.$$

a. Montrer que $(f, g) \mapsto (f \mid g)$ définit un produit scalaire sur *E*.

b. Prouver que *V* et *W* sont des sous-espaces supplémentaires dans *E* et orthogonaux pour le produit scalaire ci-dessus.

c. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $E_{\alpha,\beta} = \{f \in E \setminus f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Calculer $\inf\limits_{f \in E_{\alpha,\beta}} \left(\int_0^1 \left[f(t)^2 + f'(t)^2 \right] dt \right)$.

Exercice 3

Soit *E* un espace vectoriel euclidien, *F* et *G* deux sous-espaces supplémentaires de *E* et *s* la symétrie par rapport à *F* parallèlement à *G*. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *s* est une symétrie orthogonale (*i.e.* $G = F^{\perp}$) ;

(ii) *s* est un automorphisme orthogonal ;

(iii) *s* est un endomorphisme symétrique.

Exercice 4

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in O(n)$ et une matrice triangulaire supérieure *R* (« right triangular ») telles que $A = QR$ (Décomposition QR). Quel est l'intérêt de cette décomposition pour la résolution du système linéaire $AX = B$?

☺ *On pourra utiliser l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

Exercice 5

Soient *E* un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille de *p* vecteurs de *E*. On note $G = G(x_1, x_2, \dots, x_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $(x_i \mid x_j)$, appelée *matrice de Gram* de la famille $\mathcal{F}$ et $A = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

1) Comparer $rg(A)$ et $rg(\mathcal{F})$.

2) Montrer que $G = {}^tAA$.

3) Prouver que $\ker({}^tAA) = \ker A$ et en déduire que $rg(\mathcal{F}) = rg(G)$.

4) Prouver que $\det G \geq 0$. Dans quel cas a-t-on $\det G = 0$?

5) Soit F un sous-espace de E muni d'une base $(e_1, e_2, ..., e_p)$ et x un vecteur de E. Montrer que :

$$d(x,F)^2 = \frac{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p)}.$$

Exercice 6

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(U_1, U_2, \dots, U_n) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^n$ tels que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, ${}^tU_kU_k = 1$ et $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_k\, {}^tU_k$.

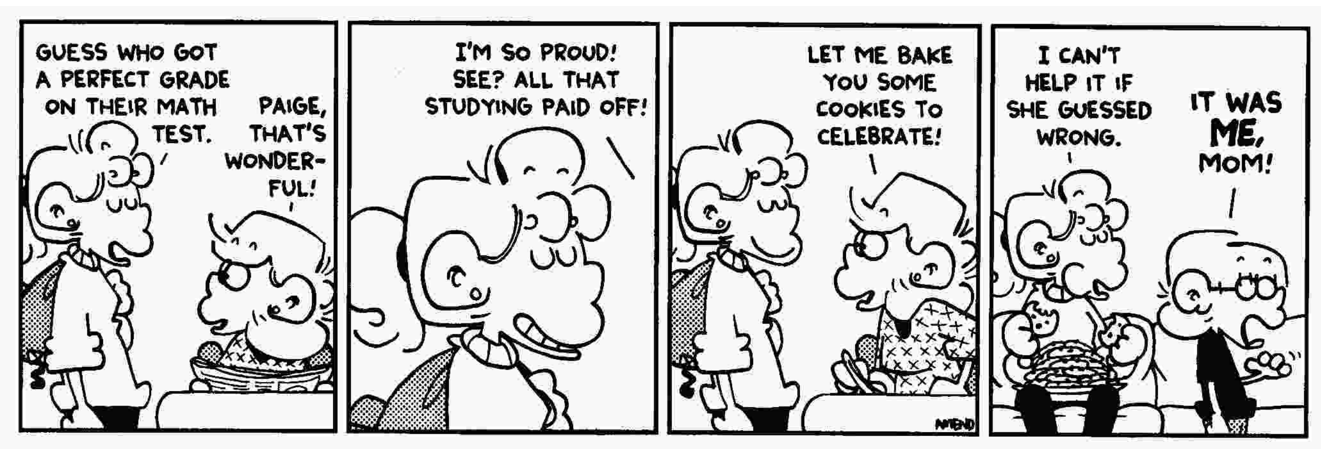
Exercice 7

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est <u>*positive*</u> si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX \geq 0$ (${}^tXAX$ est une matrice carrée 1×1 que l'on identifie à son unique coefficient).

On dit que A est <u>*définie positive*</u> si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, on a ${}^tXAX > 0$.

1) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   a. Montrer que A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels positifs.
   b. Montrer que A est définie, positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels strictement positifs.
2) Montrer que la matrice de Hilbert $H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ est définie positive.
3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = {}^tAA$.
   a. Prouver que S est une matrice symétrique positive.
   b. Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$. La matrice A est-t-elle unique ?
   c. Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
   d. Montrer que $rg\,(A) = rg\,(S)$.
4) Soit S une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.
5) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice positive. Montrer que $1 + \sqrt[n]{\det A} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$.



Exercice 8 (*Centrale*)

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

On veut montrer qu'il existe $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $M = ADB$ où D est une matrice diagonale à coefficient diagonaux tous strictement positifs.

1) Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP\,{}^tMMP = D^2$ où D est une matrice diagonale à coefficient diagonaux tous strictement positifs, que l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
2) On note $V_1, \dots, V_n$ les colonnes de MP et appelle Q la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les $\frac{1}{\lambda_1}V_1, \dots, \frac{1}{\lambda_n}V_n$. Prouver que Q est une matrice orthogonale et conclure.

Exercice 9 (*Mines*)

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E, un espace euclidien.

1) Montrer qu'un sous-espace F de E est stable par $f \in O(E)$ si et seulement si $F^\perp$ l'est aussi.
2) Montrer que, si $f \in O(E)$, $E = \operatorname{Im}(f - id_E) \oplus \ker(f - id_E)$ et que cette somme est orthogonale.
3) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note s_{u_k} la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathbb{R}u_k)^\perp$. Montrer que $\operatorname{Im}\left(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E\right) = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.