TD du chapitre 18 : Equations différentielles linéaires

Exercice 1

Résoudre les systèmes différentiels suivants.

1) $\begin{cases} x' = (2\,\mathrm{sh}\,t - 1)\,x + 2(\mathrm{sh}\,t - 1)\,y - \mathrm{ch}\,t \\ y' = (1 - \mathrm{sh}\,t)\,x + (2 - \mathrm{sh}\,t)\,y + 1 \end{cases}$

2) $X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et :

   a. A est une matrice de réflexion.

   b. A est une matrice de projection orthogonale sur un plan (avec $n \geq 3$).

   c. $A \in O^+(3)$.

   d. A est une nilpotente d'indice *n*. ☺ *On admettra que si X_0 est un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X_0 \neq 0$, alors $\left(X_0, AX_0, A^2X_0, \dots, A^{n-1}X_0\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

3) $\vec{f}\,' \wedge \vec{u} = \vec{f}$ où $\vec{u}(1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ (l'espace $\mathbb{R}^3$ est orienté positivement par sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique).

Exercice 2

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et le système différentiel $(S) : X' = AX$.

1) On suppose que *A* est antisymétrique. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique.

   a. Montrer que le produit scalaire de deux solutions de (S) est constant.

   b. En déduire que toute solution de (S) est bornée.

2) On suppose que *A* est symétrique et positive (c'est-à-dire telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$). Montrer que pour toute solution *X* de (S), la fonction $t \mapsto \|X(t)\|$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soient *I* un intervalle de $\mathbb{R}$, et deux fonctions *a* et *b*, respectivement de classe C^1 et C^0 sur *I*.

Déterminer une condition nécessaire sur *a* et *b* pour que l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ admette deux solutions non nulles y_1 et y_2 telles que pour tout $t \in I$, $y_2(t) = t\,y_1(t)$.

Cette condition est-elle suffisante ?

Résoudre $y'' + 2t\,y' + (t^2 + 1)y = te^{-t^2/2}$.

Exercice 4

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

1) On suppose que *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\alpha f(x)\right]=\ell$ où α et ℓ sont deux nombres complexes tels que tel que $\mathrm{Re}(\alpha)>0$.

   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\ell}{\alpha}$.

2) On suppose que *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f''(x)+f'(x)+f(x)\right]=0$.

   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3) On suppose que *f* est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) et qu'il existe $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{C}^n$ tel que les racines de $P=X^n+\alpha_{n-1}X^{n-1}+\dots+\alpha_1X+\alpha_0$ ont toutes une partie réelle strictement négative et :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f^{(n)}(x)+\alpha_{n-1}f^{(n-1)}(x)+\dots+\alpha_1 f'(x)+\alpha_0 f(x)\right]=0.$$

   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

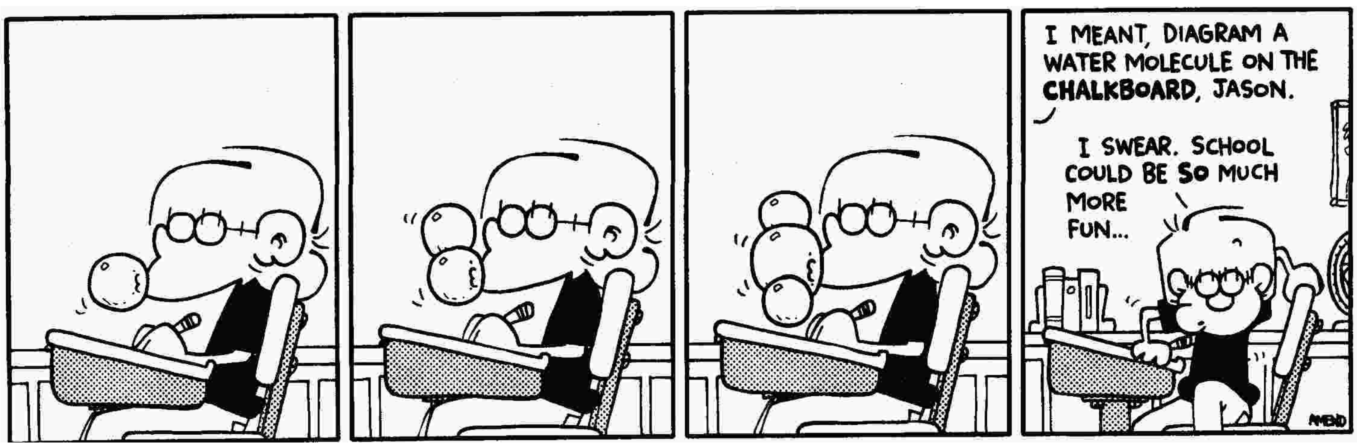
Exercice 5

Déterminer le rayon de convergence de $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$, puis calculer $f(x)$ quand x appartient à l'intervalle ouvert de convergence.

En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$.

Exercice 6

Montrer que pour tout réel $x>0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$.



Exercice 7 (*Centrale*)

Soit *f* une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles. On considère l'équation :

$$(E): \quad y'' + f(x)y = 0.$$

1) Montrer que si y est une solution bornée de (E), alors yf est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Après avoir montré qu'elle existe, déterminer la limite de y' en $+\infty$.
2) Prouver que, si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), la fonction $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ est constante et en déduire que l'équation différentielle (E) admet des solutions non bornées.

Exercice 8 (*Mines*)

Déterminer toutes les fonctions *f* dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.