TD du chapitre 19 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1

1) Soit $f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0 \end{cases}$.

   Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel *f* est de classe C^1.

   Les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent-elles ? Si oui, sont-elles égales ?

2) Montrer que $f:(x,y)\mapsto \dfrac{\sin x-\sin y}{\operatorname{sh} x-\operatorname{sh} y}$ admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Dans les cas suivants, montrer que *f* ou *g* est différentiable sur son ensemble de définition et déterminer sa différentielle.

1) $f:\ \mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}\ ;\ P\mapsto \int_0^1 P^2$.
2) $f:\ GL_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ A\mapsto A^{-1}$.
3) $f:\ E\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto \left(x\,|\,u(x)\right)$ où *E* est un espace euclidien et *u* un endomorphisme symétrique de *E*.

   Puis $g:\ E\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto \dfrac{\left(x\,|\,u(x)\right)}{\left(x\,|\,x\right)}$.

   On montrera que $dg(a)=0$ si et seulement si *a* est un vecteur propre de *u*.

Exercice 3

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue en *a*, $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue en *b* et $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application admettant un maximum local en $\left(u(a),v(b)\right)$.

Montrer que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ ;\ (x,y)\mapsto f(x,y)=\varphi\left(u(x),v(y)\right)$ admet un maximum local en (a,b).

Exercice 4

Déterminer le maximum du produit des distances d'un point *M* intérieur à un triangle *ABC* aux cotés de ce triangle.

Exercice 5

Soit $f\in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

1) Soit $g:\ (x,y)\mapsto \int_0^y \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt-\int_0^x \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0)dt$. Montrer que $g\in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et vérifie :

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x} \quad\text{et}\quad \frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial y}.$$

2) On définit sur $\mathbb{R}_+$ l'application $\Phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) d\theta$. Montrer que Φ est de classe C^1 et calculer sa dérivée.

3) En déduire que si f possède un extremum local en $(0,0)$, alors f est constante au voisinage de $(0,0)$.

Exercice 6

1) Résoudre le système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x + y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - y \end{cases}$.

2) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle non linéaire (E) : $x + y + (x - y)y' = 0$.

Exercice 7

On appelle E l'espace des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit sur E les applications Δ et Φ par :

$$\Delta : f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \Phi : f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

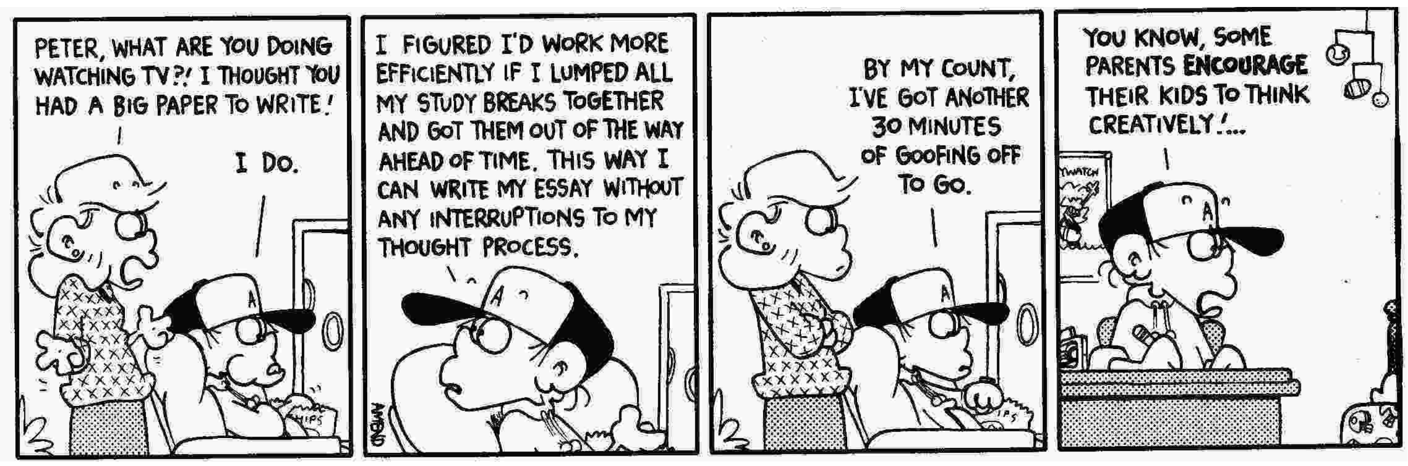
Enfin, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on note $f_{i,j}$: $(x, y) \mapsto x^i y^j$.

1) Montrer que la famille $(f_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est libre. On note F le sous-espace de E engendré par cette famille.

2) Montrer que Δ et Φ induisent des endomorphismes de F.

3) Déterminer le noyau de la restriction de Φ à F. Montrer que c'est un supplémentaire (dans F) de :

$$G = \left\{(x, y) \mapsto xy\, f(x, y) \setminus f \in F\right\}.$$



Exercice 8 (*Mines*)

Soit la fonction H définie par $H(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0,0)$ et $H(0,0) = 0$.

Cette fonction est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9 (*Mines*)

Soit f une fonction dérivable sur U, un ouvert de $\mathbb{R}$, et à images dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si f admet un extremum local en $x_0 \in U$, alors $f'(x_0) = 0$.
2) Donner un théorème équivalent lorsque U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et le démontrer.
3) Trouver les extrema de $f : (x, y) \mapsto |\sin(x+iy)|^2$ sur $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 10 (*Centrale*)

On dit qu'une application f, continue de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est α-positivement homogène s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x, y, z)$.

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

Montrer que f est α-positivement homogène si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \alpha f(x, y, z).$$

☺ *On pourra dériver par rapport à λ, à x, y et z constants et utiliser des changements de variable du type $u = \lambda x$.*