

TD du chapitre 20 : Applications géométriques du gradient

Dans tout ce qui suit, le plan (*resp.* l'espace) est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (*resp.* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

Exercice 1

Déterminer un paramétrage de la courbe plane C d'équation $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$ et en déterminer les points singuliers (s'il y en a).

Exercice 2

Soit \mathcal{E} la courbe plane d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a > 0$, $b > 0$ et $a > b$.

Trouver les normales à \mathcal{E} les plus éloignées de O , l'origine du repère (et centre de symétrie de \mathcal{E}).

Exercice 3

Soit $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$.

- 1) Tracer l'intersection de $\Sigma = f^{-1}(\{1\})$ et du plan P d'équation $z = 0$. Dessiner l'allure de Σ .
- 2) Soit M_0 un point de Σ de coordonnées (x_0, y_0, z_0) . Donner une équation du plan tangent à Σ en M_0 .
- 3) Soit $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que la restriction de g à Σ admet un extremum local en M_0 .

Soient $G_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto g(\cos(t + \varphi), \sin(t + \varphi), z_0)$ et $G_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto g(x_0, y_0, z_0 + t)$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$.

- a. Montrer que G_1 et G_2 sont dérivables en 0, et calculer leurs dérivées.
- b. Montrer que $\nabla g(M_0)$ est colinéaire à $\nabla f(M_0)$.

Exercice 4

On définit Σ par l'équation $xyz = 1$.

- 1) Montrer que Σ est une surface régulière.
- 2) Etudier l'intersection de Σ avec les plans d'équations respectives $x = x_0$, $y = y_0$ et $z = z_0$. En déduire l'allure de Σ .
- 3) Montrer que pour tout plan tangent à Σ , le tétraèdre formé par ce plan et les trois plans engendrés par les vecteurs de base a un volume constant (indépendant du plan tangent).

☺ Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est donné par $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \right|$.

Exercice 5

Soit S la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$.

- 1) Quelle est l'intersection de S avec le plan (xOy) ?
- 2) Quels sont les points singuliers de S ?
- 3) Quelles sont les droites tracées sur S ?
- 4) Montrer que la partie de S limitée au cube $[-1, 1]^3$ admet le paramétrage suivant :

$$(u, v) \mapsto (\cos u, \cos v, \cos(u + v)).$$

Exercice 6

Fenêtre de Viviani : Soit un réel $a > 0$ et C la courbe paramétrée par :

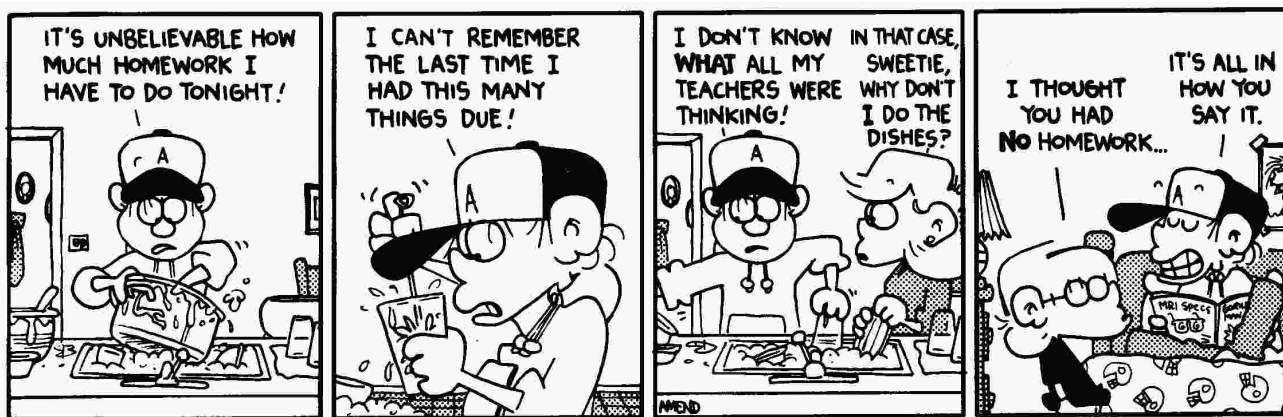
$$\begin{cases} x = a \sin(2t) \\ y = a(1 - \cos(2t)) \\ z = 2a \cos t \end{cases}$$

Montrer que C est tracée sur une sphère, un cylindre parabolique et un cylindre de révolution, que l'on précisera.

Exercice 7

Soient les surfaces : $S_1 : y^2(x^2 + z^2) - x^2 - 3z^2 = 0$ et $S_2 : -x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$.

Montrer, qu'en chacun de leurs points communs, les plans tangents à S_1 et S_2 sont perpendiculaires.

**Exercice 8 (Centrale)**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{1+x^2} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On appelle S la surface de \mathbb{R}^3 d'équation $z = f(x, y)$.

- 1) La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ? de classe C^1 ? Déterminer ses lignes de niveau.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la droite D_a , de pente a et passant par le point $A(1,1)$ et C la courbe tracée sur S dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est D_a .

Soit M un point de C . Déterminer la tangente à C en M .

Exercice 9 (Centrale)

1) Soient f et g deux fonctions de $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $m = \max(f, g)$. On note :

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = g(x, y)\}$$

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) > g(x, y)\}$$

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) < g(x, y)\}$$

On suppose qu'il existe un point $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ en lequel m réalise un minimum local.

1) Que dire si $\vec{a} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$?

2) On suppose que $\vec{a} \in \mathcal{E}$. Montrer que la famille $((\nabla f)(\vec{a}), (\nabla g)(\vec{a}))$ est liée.

