Corrigé du DM n° 7

Partie II

II.A – La fonction Γ

II.A.1) On prend $x \in \mathbb{R}_+^*$.

La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions et on a :

- $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^{x-1}dt$ converge car $x-1>-1$, donc $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge ;
- $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t}=0$ par croissances comparées, donc $t^{x-1}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et, comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t^2}$ converge, $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge et comme $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto t^{x-1}e^{-t} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

II.A.2) Avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \alpha t$ réalise une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. En effectuant le changement de variable $u=\alpha t$, on a, sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}u\right)^{x-1} e^{-u}\,\frac{1}{\alpha}du = \frac{1}{\alpha^x}\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}du\,.$$

Et comme $\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}du = \Gamma(x)$ converge car $x>0$, on peut conclure que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha^x}\Gamma(x)\,.}$$

II.B – La fonction β *et son équation fonctionnelle*

Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

II.B.1) On prend $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$ comme produit de telles fonctions et on a :

- $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et, comme plus haut, $\int_0^{1/2} t^{x-1}dt$ converge, donc $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge ;
- $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 1}{\sim} (1-t)^{y-1}$ et $\int_{1/2}^1 (1-t)^{y-1}dt$ converge car $y-1>-1$, donc $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge.

Ainsi, $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge et donc :

$$\boxed{\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \text{ est bien définie pour tous } x,y\in\mathbb{R}_+^*.}$$

II.B.2) La fonction $t\mapsto 1-t$ réalise une bijection de classe C^1 de $]0,1[$ dans $]0,1[$. En effectuant le changement de variable $u=1-t$, on a :

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_1^0(1-u)^{x-1}u^{y-1}(-1)du=\int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du=\beta(y,x).$$

Ainsi, pour tous réels $x>0$ et $y>0$, on a :

$$\boxed{\beta(x,y)=\beta(y,x)}$$

II.B.3) Soit $x,y\in\mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $t\mapsto\frac{1}{x}t^x$ et $t\mapsto(1-t)^y$ sont de classe C^1 sur $]0,1[$, et pour tout segment $[a,b]\subset]0,1[$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b t^{x-1}(1-t)^y dt&=\left[\frac{1}{x}t^x(1-t)^y\right]_a^b-\int_a^b\frac{1}{x}t^x\left[-y(1-t)^{y-1}\right]dt\\&=\frac{1}{x}b^x(1-b)^y-\frac{1}{x}a^x(1-a)^y+\frac{y}{x}\int_a^b t^x(1-t)^{y-1}dt\end{aligned}$$

En faisant tendre *a* vers 0 et *b* vers 1, on obtient $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt=\frac{y}{x}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt$, soit :

$$\beta(x,y+1)=\frac{y}{x}\beta(x+1,y)\quad\textbf{(1)}.$$

De plus :

$$\beta(x,y+1)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1}dt=\int_0^1\left[t^{x-1}(1-t)^{y-1}-t^x(1-t)^{y-1}\right]dt.$$

Et comme $\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt$ et $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ convergent, on obtient :

$$\beta(x,y+1)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt-\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt=\beta(x,y)-\beta(x+1,y).$$

Ainsi :

$$\beta(x,y+1)+\beta(x+1,y)=\beta(x,y)\quad\textbf{(2)}.$$

En combinant **(1)** et **(2)**, on obtient :

$$\frac{y}{x}\beta(x+1,y)+\beta(x+1,y)=\beta(x,y)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x+y}{x}\beta(x+1,y)=\beta(x,y).$$

Soit :

$$\boxed{\beta(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\beta(x,y)}$$

Remarquons que l'on a de même $\beta(x,y+1)=\frac{y}{x+y}\beta(x,y)$.

II.B.4) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On a $x+1, y+1 \in \mathbb{R}_+^*$ et avec les formules ci-dessus :

$$\beta(x+1, y+1) = \frac{x}{x+(y+1)}\beta(x, y+1) = \frac{x}{x+y+1}\frac{y}{x+y}\beta(x, y).$$

Donc :

$$\boxed{\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)}$$

***II.C – Relation entre la fonction* β *et la fonction* Γ**

II.C.1) Supposons la relation ($\mathcal{R}$) vraie pour tous $u, v \in \left]1, +\infty\right[$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On a $x+1 > 1$ et $y+1 > 1$, donc :

$$\beta(x+1, y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+1+y+1)} = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)}.$$

Or, d'après l'un des résultats admis sur la fonction Γ, on a :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$
$$\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$$
$$\Gamma(x+y+2) = (x+y+1)\Gamma(x+y+1) = (x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)$$

Donc :

$$\beta(x+1, y+1) = \frac{x\Gamma(x)\, y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)} = \frac{xy}{(x+y+1)(x+y)}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Or, d'après la question précédente, $\beta(x+1, y+1) = \dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)$, donc :

$$\frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y) = \frac{xy}{(x+y+1)(x+y)}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Et comme $\dfrac{xy}{(x+y+1)(x+y)} \neq 0$, on obtient :

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Ainsi, si la relation ($\mathcal{R}$) est vraie pour $x > 1$ et $y > 1$, alors elle est vraie pour $x > 0$ et $y > 0$, et donc :

$$\boxed{\text{Il suffit de montrer la relation } (\mathcal{R}) \text{ pour } x > 1 \text{ et } y > 1.}$$

II.C.2) La fonction rationnelle $u \mapsto \dfrac{u}{1+u} = 1 - \dfrac{1}{1+u}$ réalise une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\left]0,1\right[$. En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{u}{1+u}$ (donc $u = \dfrac{t}{1-t}$), on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} (1-t)^{x+y} \frac{1}{(1-t)^2}\,dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Soit :

$$\boxed{\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du}$$

II.C.3) La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme produit de telles fonctions) et prolongeable par continuité en 0 (car $x+y-1>1$).

On peut alors écrire pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $F_{x,y}(t) = \int_0^t e^{-u}u^{x+y-1}du$ et :

$$\Gamma(x+y) - F_{x,y}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{x+y-1}du - \int_0^t e^{-u}u^{x+y-1}du = \int_t^{+\infty} e^{-u}u^{x+y-1}du .$$

Et comme $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x+y) - F_{x,y}(t) \geq 0$ par positivité de l'intégrale, donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y).}$$

II.C.4) On pose $G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\left((1+u)a\right) du$.

Soit $h:(a,u) \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\left((1+u)a\right)$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $u \mapsto h(a,u)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme produit de telles fonctions).
- Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $a \mapsto h(a,u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (car $F_{x,y}$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+$, donc dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}_+$).
- Pour tout $(a,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a $(1+u)a \in \mathbb{R}_+$, donc d'après la question précédente :

  $$\left|h(a,u)\right| = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\left((1+u)a\right) \leq \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y).$$

  Et, $u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$, est positive et proportionnelle à $u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}$ qui est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après **II.C.2**).

Tout ceci permet de conclure que $a \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\left((1+u)a\right) du$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

II.C.5) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $F_{x,y}(t) = \int_0^t e^{-u}u^{x+y-1}du$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} F_{x,y}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{x+y-1}du = \Gamma(x+y)$.

En conjecturant que l'on peut intervertir limite et intégrale, on peut supposer alors que :

$$\lim_{a \to +\infty} G(a) = \lim_{a \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\left((1+u)a\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)du .$$

Prouvons cela. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on a avec le résultat de la question **II.C.3** :

$$\begin{aligned}\left|G(a) - \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)du\right| &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)du - G(a) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\left[\Gamma(x+y) - F_{x,y}\left((1+u)a\right)\right]du\end{aligned}$$

Or, on a vu plus haut que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$:

$$\Gamma(x+y) - F_{x,y}\left((1+u)a\right) = \int_{(1+u)a}^{+\infty} e^{-t} t^{x+y-1} dt = \int_{a+ua}^{+\infty} e^{-t} t^{x+y-1} dt .$$

Et comme $t \mapsto e^{-t} t^{x+y-1}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $a + ua \geq a$, on a :

$$\Gamma(x+y) - F_{x,y}\left((1+u)a\right) = \int_{a+ua}^{+\infty} e^{-t} t^{x+y-1} dt \leq \int_{a}^{+\infty} e^{-t} t^{x+y-1} dt .$$

Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$:

$$\left| G(a) - \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y) du \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \left[\int_a^{+\infty} e^{-t} t^{x+y-1} dt \right] du = \left(\int_a^{+\infty} e^{-t} t^{x+y-1} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \right).$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$ ne dépend pas de a et $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_a^{+\infty} e^{-t} t^{x+y-1} dt = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{a \to +\infty} G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y) du = \Gamma(x+y) \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du .$$

Enfin, comme $\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$ d'après la question **II.C.2**, on a bien :

$$\boxed{\lim_{a \to +\infty} G(a) = \Gamma(x+y) \beta(x, y)}$$

II.C.6) On reprend $h : (a,u) \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\left((1+u)a\right)$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$.

On a vu que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x+y-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0, donc $F_{x,y}$ est une primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, donc C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $[c,d] \subset \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $u \mapsto h(a,u)$ est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on l'a vu plus haut).
- Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $a \mapsto h(a,u)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ (car $F_{x,y}$ l'est) et :

$$\frac{\partial h}{\partial a}(a,u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} (1+u) F_{x,y}'\left((1+u)a\right) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} (1+u) e^{-(1+u)a} \left((1+u)a\right)^{x+y-1} = u^{x-1} e^{-(1+u)a} a^{x+y-1} .$$

- Pour tout $(a,u) \in [c,d] \times \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\left| \frac{\partial h}{\partial a}(a,u) \right| = u^{x-1} e^{-(1+u)a} a^{x+y-1} \leq u^{x-1} e^{-(1+u)c} d^{x+y-1} \leq d^{x+y-1} u^{x-1} e^{-uc} .$$

  Et, $u \mapsto d^{x+y-1} u^{x-1} e^{-uc}$, est positive et proportionnelle à $u \mapsto u^{x-1} e^{-uc}$ qui est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après **II.A.2**).

Alors :

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [c,d] \text{, de dérivée } G' : a \mapsto \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-(1+u)a} a^{x+y-1} du .}$$

Comme le résultat ci-dessus est vrai pour tout $[c,d]\subset\mathbb{R}_+^*$ et $\bigcup_{[c,d]\subset\mathbb{R}_+^*}[c,d]=\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Et on a de plus $G': a\mapsto \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-(1+u)a}a^{x+y-1}du$.

II.C.7) On vient de voir que pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

.

Or, d'après la question **II.A.2**, $\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-au}du=\frac{1}{a^x}\Gamma(x)$, donc :

$$G'(a)=e^{-a}a^{x+y-1}\frac{1}{a^x}\Gamma(x).$$

Soit, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{G'(a)=e^{-a}a^{y-1}\Gamma(x)}$$

II.C.8) Comme G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire pour tout $[c,d]\subset\mathbb{R}_+^*$

$$G(d)-G(c)=\int_c^d G'(a)da=\int_c^d e^{-a}a^{y-1}\Gamma(x)da=\Gamma(x)\int_c^d e^{-a}a^{y-1}da.$$

Or, d'après la question **II.C.4**, G est continue en 0, donc $\lim_{c\to 0}G(c)=G(0)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}F_{x,y}(0)du=0$ (car $F_{x,y}(0)=\int_0^0 e^{-u}u^{x+y-1}du=0$) et d'après la question **II.C.5**, $\lim_{d\to+\infty}G(d)=\Gamma(x+y)\beta(x,y)$. Alors :

$$\Gamma(x+y)\beta(x,y)=\lim_{d\to+\infty}G(d)-\lim_{c\to 0}G(c)=\Gamma(x)\int_0^{+\infty}e^{-a}a^{y-1}da=\Gamma(x)\Gamma(y).$$

Et comme $\Gamma(x+y)\neq 0$, on obtient bien, pour tous $x,y\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}}$$