Corrigé du DM n° 8

Partie II

3. Soit $x\in \mathbb{R}_+^*$. Posons $(Z_x)^r = f(X_x)$ avec $f : t \mapsto \left(\dfrac{t}{x}\right)^r$.

La variable X_x suit une loi de Poisson de paramètre *x*, donc $X_x(\Omega)=\mathbb{N}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f(n)P(X_x=n)=\left(\frac{n}{x}\right)^r e^{-x}\frac{x^n}{n!}=\frac{e^{-x}}{x^r}\frac{n^r x^n}{n!}.$$

Si $n\geq 1$, on a $f(n)P(X_x=n)\neq 0$ et :

$$\left|\frac{f(n+1)P(X_x=n+1)}{f(n)P(X_x=n)}\right|=\frac{\dfrac{(n+1)^r x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^r x^n}{n!}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^r\frac{x}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0<1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum f(n)P(X_x=n)$ et donc, d'après le théorème du transfert, $f(X_x)$ est d'espérance finie et :

$$E\left((Z_x)^r\right)=E\left(f(X_x)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}f(n)P(X_x=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x^r}\frac{n^r x^n}{n!}.$$

Comme $S_{r,1}(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}x^n$, on peut conclure que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{(Z_x)^r \text{ est d'espérance finie avec } E\left((Z_x)^r\right)=\frac{e^{-x}}{x^r}S_{r,1}(x).}$$

4. Soit à nouveau $x\in\mathbb{R}_+^*$. Comme X_x suit une loi de Poisson de paramètre *x*, on a :

$$\boxed{E(X_x)=V(X_x)=x}$$

Comme $E(X_x)=V(X_x)=x$, la variable $Z_x=\dfrac{X_x}{x}$ admet une espérance $E(Z_x)=\dfrac{E(X_x)}{x}=1$ et une variance $V(Z_x)=\dfrac{V(X_x)}{x^2}=\dfrac{1}{x}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$P\left(\left|Z_x-E(Z_x)\right|\geq a\right)\leq\frac{V(Z_x)}{a^2}\quad\Leftrightarrow\quad P\left(\left|Z_x-1\right|\geq a\right)\leq\frac{1}{a^2x}.$$

En prenant alors $a=\dfrac{1}{x^{1/3}}=x^{-1/3}>0$, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$P\left(\left|Z_x-1\right|\geq x^{-1/3}\right)\leq\frac{1}{(x^{-1/3})^2x}=\frac{1}{x^{1/3}}.$$

Et comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} P\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right) = 0}$$

5. On a vu dans la question **3** que la variable $(Z_x)^r$ admet une espérance. Or, X_x est positive (car $X_x(\Omega) = \mathbb{N}$) et $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc $(Z_x)^r$ est positive. On peut alors appliquer l'inégalité de Markov, soit pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P\left((Z_x)^r \geq a\right) \leq \frac{E\left((Z_x)^r\right)}{a} \iff aP\left((Z_x)^r \geq a\right) \leq E\left((Z_x)^r\right).$$

Si $x > 1$, on a $1 - x^{-1/3} > 0$ et en prenant $a = (1 - x^{-1/3})^r > 0$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$(1 - x^{-1/3})^r P\left((Z_x)^r \geq (1 - x^{-1/3})^r\right) \leq E\left((Z_x)^r\right).$$

Enfin comme $t \mapsto t^r$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $r > 0$), on a $\left((Z_x)^r \geq (1 - x^{-1/3})^r\right) = \left(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}\right)$ et ainsi, pour tout réel $x > 1$:

$$\boxed{(1 - x^{-1/3})^r P\left(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}\right) \leq E\left((Z_x)^r\right)}$$

On a $\lim_{x\to+\infty} (1 - x^{-1/3})^r = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^{1/3}}\right)^r = 1$, on veut donc montrer que $\lim_{x\to+\infty} P\left(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}\right) = 1$.

Or, d'après la question précédente, on a $\lim_{x\to+\infty} P\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right) = 0$. Or :

$$\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right) = \left(Z_x - 1 \geq x^{-1/3}\right) \cup \left(Z_x - 1 \leq -x^{-1/3}\right) = \left(Z_x \geq 1 + x^{-1/3}\right) \cup \left(Z_x \leq 1 - x^{-1/3}\right).$$

Et :

$$\left(Z_x \leq 1 - x^{-1/3}\right) = \left(Z_x < 1 - x^{-1/3}\right) \cup \left(Z_x = 1 - x^{-1/3}\right).$$

Donc :

$$\left(Z_x < 1 - x^{-1/3}\right) \subset \left(Z_x \leq 1 - x^{-1/3}\right) \subset \left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right).$$

Et ainsi :

$$0 \leq P\left(Z_x < 1 - x^{-1/3}\right) \leq P\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right).$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a alors $\lim_{x\to+\infty} P\left(Z_x < 1 - x^{-1/3}\right) = 0$, soit :

$$\lim_{x\to+\infty} P\left(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left[1 - P\left(Z_x < 1 - x^{-1/3}\right)\right] = 1.$$

Finalement, $\lim_{x\to+\infty} (1 - x^{-1/3})^r = \lim_{x\to+\infty} P\left(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}\right) = 1$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (1 - x^{-1/3})^r P\left(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}\right) = 1}$$

6. Soit $N\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$.

On a $Y_{x,N}=Q(X_x)$ où $Q=\prod_{k=0}^{N-1}(T-k)$ est un polynôme unitaire de degré *N* (et d'indéterminée notée *T*).

On a alors $Q(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}n^N$, donc :

$$Q(n)P(X_x=n)=Q(n)e^{-x}\frac{x^n}{n!}\underset{n\to+\infty}{\sim}n^Ne^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$

Or, on a vu plus haut que la série $\sum\frac{e^{-x}}{x^r}\frac{n^rx^n}{n!}$, et donc la série $\sum n^re^{-x}\frac{x^n}{n!}$, convergent pour tout pour tout réel $r>0$. En particulier pour $r=N>0$, la série $\sum n^Ne^{-x}\frac{x^n}{n!}$ converge et comme elle est à termes positifs, on peut conclure que la série $\sum Q(n)P(X_x=n)$, converge absolument, donc que :

$$\boxed{\text{La variable } Y_{x,N} \text{ admet une espérance.}}$$

Par le théorème du transfert, on a alors :

$$E(Y_{x,N})=\sum_{n=0}^{+\infty}Q(n)P(X_x=n).$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $Q(n)=\prod_{k=0}^{N-1}(n-k)$, donc $Q(n)=0$ quand $n<N$ et $Q(n)=\frac{n!}{(n-N)!}$. Alors :

$$E(Y_{x,N})=\sum_{n=N}^{+\infty}Q(n)P(X_x=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{(n-N)!}e^{-x}\frac{x^n}{n!}=x^Ne^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n-N}}{(n-N)!}.$$

Et après réindexation $k=n-N$, on obtient $E(Y_{x,N})=x^Ne^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=x^Ne^{-x}e^x$, soit :

$$\boxed{E(Y_{x,N})=x^N}$$

7. Soit $N\in\mathbb{N}^*$.

Si on pose $H_0=1$ et pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, $H_j=\prod_{i=0}^{j-1}(T-i)$ (polynôme d'indéterminée notée *T*).

On a $\deg H_j=j$ pour tout $j\in\mathbb{N}$, donc $\left(H_0,H_1,\dots,H_N\right)$ est une famille échelonnée en degrés de $N+1$ polynômes de $\mathbb{R}_N[T]$, qui est de dimension $N+1$: c'est donc une base de $\mathbb{R}_N[T]$ et ainsi, il existe des réels $a_0,a_1,\dots,a_N$ tels que :

$$T^N=a_0H_0+a_1H_1+\dots+a_NH_N.$$

De plus, $0=0^N=a_0H_0(0)+a_1H_1(0)+\dots+a_NH_N(0)=a_0$, donc :

$$T^N=a_1H_1+\dots+a_NH_N.$$

Enfin, $\deg H_j<N$ pour tout entier $j\in[\![1,N-1]\!]$ (s'il y a lieu, c'est-à-dire si $N\geq 2$), et on peut écrire $H_N=T^N+R(T)$ avec $\deg R<N$. Donc, $T^N=a_NT^N+\left(a_1H_1+\dots+a_NR\right)$ avec $\deg\left(a_1H_1+\dots+a_NR\right)<N$ et ainsi, on a $a_N=1$.

Alors, pour tout réel $x>0$, on a :

$$(X_x)^N=\sum_{k=1}^{N}a_kH_k(X_x)=\sum_{k=1}^{N}a_k\prod_{i=0}^{k-1}(X_x-i)=\sum_{k=1}^{N}a_kY_{x,k}\ .$$

Finalement, il existe bien des réels $a_1,\dots,a_N$ tels que $a_N=1$ et pour tout réel $x>0$:

$$\boxed{(X_x)^N=\sum_{k=1}^{N}a_kY_{x,k}}$$

On a alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$(Z_x)^N=\left(\frac{X_x}{x}\right)^N=\frac{(X_x)^N}{x^N}=\frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N}a_kY_{x,k}\ .$$

Et, par linéarité de l'espérance :

$$E\left((Z_x)^N\right)=E\left(\frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N}a_kY_{x,k}\right)=\frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N}a_kE(Y_{x,k})\,.$$

Avec la question précédente, on obtient $E\left((Z_x)^N\right)=a_N\dfrac{x^N}{x^N}$ si $N=1$ et si $N\geq 2$:

$$E\left((Z_x)^N\right)=\frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N}a_kx^k=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{a_k}{x^{N-k}}+a_N\frac{x^N}{x^N}\,.$$

En $i=N-k$ et avec $a_N=1$, on obtient $E\left((Z_x)^N\right)=1$ si $N=1$ et si $N\geq 2$:

$$E\left((Z_x)^N\right)=\sum_{k=i}^{N-1}\frac{a_{N-i}}{x^i}+1\,.$$

Enfin, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_{N-i}}{x^i}=0$ pour tout $i\in[\![1,N-1]\!]$ (si $N\geq 2$), donc dans tous les cas :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}E\left((Z_x)^N\right)=1}$$

8. On pose $N=\lfloor r\rfloor\in\mathbb{N}$ (car $r>0$) et $s=r-N=r-\lfloor r\rfloor\in[0,1[$.

- Si $s=0$ (c'est-à-dire si r est entier), on a $t^s=1$ et $s(t-1)=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, donc l'inégalité $t^s\leq s(t-1)+1$ est vérifiée (c'est même une égalité).
- Si $s\in]0,1[$, posons pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $h(t)=t^s-s(t-1)-1$.

  La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de telles fonctions et pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

  $$h'(t)=s(t^{s-1}-1)\,.$$

  Comme $s\in]0,1[$, on a alors :

  $$h'(t)\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad t^{s-1}\geq 1\quad\Leftrightarrow\quad t\leq 1\,.$$

  Donc, h est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$: elle admet un maximum en 1, qui est $h(1)=0$. Ainsi, $h(t)\leq 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ et, avec $\lim\limits_{t\to 0}h(t)=s-1<0$, on obtient l'inégalité voulue pour tout $t\in\mathbb{R}_+$.

Finalement, quel que soit $s\in[0,1[$, on a bien pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{t^s\le s(t-1)+1}$$

Comme Z_x est positive (vu question **5**), on a $(Z_x)^s\le s(Z_x-1)+1$, soit :

$$(Z_x)^{r-N}\le 1-s+sZ_x.$$

Et en multipliant par $(Z_x)^N\ge 0$, on obtient pour tout réel $x>0$:

$$\boxed{(Z_x)^r\le(1-s)(Z_x)^N+s(Z_x)^{N+1}}$$

9. Avec la croissance et la linéarité de l'espérance, la question précédente donne pour tout réel $x>0$:

$$E\left((Z_x)^r\right)\le E\left((1-s)(Z_x)^N+s(Z_x)^{N+1}\right)=(1-s)\,E\left((Z_x)^N\right)+s\,E\left((Z_x)^{N+1}\right).$$

Alors, avec la question **5**, on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$(1-x^{-1/3})^r\,P\left(Z_x\ge 1-x^{-1/3}\right)\le E\left((Z_x)^r\right)\le(1-s)\,E\left((Z_x)^N\right)+s\,E\left((Z_x)^{N+1}\right).$$

Et toujours avec la question **5**, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(1-x^{-1/3})^r\,P\left(Z_x\ge 1-x^{-1/3}\right)=1.$$

Avec la question **7**, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}E\left((Z_x)^N\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}E\left((Z_x)^{N+1}\right)=1$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(1-s)\,E\left((Z_x)^N\right)+s\,E\left((Z_x)^{N+1}\right)\right]=(1-s)+s=1.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{x\to+\infty}E\left((Z_x)^r\right)=1.$$

Enfin, d'après la question **3**, on a $E\left((Z_x)^r\right)=\dfrac{e^{-x}}{x^r}S_{r,1}(x)$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^r}S_{r,1}(x)=1\quad\Leftrightarrow\quad S_{r,1}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}e^xx^r.$$

Ainsi, $S_{r,1}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{1}x^re^x$, autrement dit :

$$\boxed{\text{L'énoncé } (H_{r,1}) \text{ est validé.}}$$