Corrigé du DS n° 5

A - Quelques considérations en dimension 2

1. On suppose que u vérifie **(*C3*)**, donc est semblable à $-u$. Or, deux endomorphismes semblables ont même trace, donc $Tr(-u)=Tr(u)$. Comme la trace est linéaire, on a aussi $Tr(-u)=-Tr(u)$, donc on obtient ici, $-Tr(u)=Tr(u)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Si } u \text{ vérifie } \textbf{(C3)}\text{, alors } Tr(u)=0.}$$

2. Si $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de u dans une base de E, on a :

$$\chi_u=\chi_M=\begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix}=X^2-(a+d)X+ad-bc=X^2-Tr(M)X+\det M=X^2-Tr(u)X+\det u.$$

Or, ici $Tr(u)=0$ et $\det u=-\delta^2$, donc $\chi_u=X^2-\delta^2$. Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_u(u)=u^2-\delta^2 id_E=0$, soit :

$$\boxed{u^2=\delta^2 id_E}$$

Comme $\det u=-\delta^2\neq 0$, $\chi_u=X^2-\delta^2$ possède deux racines distinctes, $-\delta$ et δ, donc :

$$\boxed{Sp(u)=\{-\delta,\delta\}}$$

Ainsi, u est un endomorphisme d'un espace de dimension 2 qui possède deux valeurs propres distinctes, donc u est diagonalisable et :

$$\boxed{\text{Les deux sous-espaces propres de } u \text{ sont tous les deux de dimension 1.}}$$

3. Soient e_1 et e_2 des vecteurs propres associés à δ et $-\delta$ respectivement.

La famille (e_1,e_2) est alors une base de E et :

$$u(e_1+e_2)=u(e_1)+u(e_2)=\delta e_1-\delta e_2=\delta(e_1-e_2).$$

Comme (e_1,e_2) est libre et $\delta\neq 0$, les vecteurs e_1+e_2 et $\delta(e_1-e_2)$ ne sont pas colinéaires et donc, si $D=\text{Vect}(e_1+e_2)$, on a $u(D)=\text{Vect}(e_1-e_2)$ et donc :

$$\boxed{u(D)\not\subset D}$$

Les vecteurs e_1+e_2 et e_1-e_2 n'étant pas colinéaires, ils constituent bien une base du plan E.

Avec $D=\mathrm{Vect}(e_1+e_2)$ et $D'=u(D)=\mathrm{Vect}(e_1-e_2)$, on a alors :

$$E=D\oplus D'.$$

De plus, on a $u(e_1-e_2)=\delta(e_1+e_2)$, donc

$$D'=u(D) \text{ et } u(D')=D.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{u \text{ est échangeur.}}$$

B - La condition (*C1*) implique (*C2*) et (*C3*)

4. Posons $M_A=\left[\begin{array}{c|c} 0_n & 0_{n,p} \\ \hline A & 0_p \end{array}\right]$ et $M_B=\left[\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline 0_{p,n} & 0_p \end{array}\right]$.

En effectuant un produit par blocs, on obtient immédiatement :

$$\boxed{M_A^2=M_B^2=0_{n+p}}$$

Or, $M=M_A+M_B$ et comme $M_A^2=M_B^2=0_{n+p}$:

$$\boxed{M \text{ est bien la somme de deux matrices de carré nul.}}$$

5. La matrice D est diagonale, de coefficients diagonaux valant – 1 ou 1, donc $D^2=I_{n+p}$ et ainsi :

$$\boxed{D \text{ est inversible d'inverse elle-même } (D \text{ est une matrice de symétrie}).}$$

A nouveau avec le produit par blocs, on obtient :

$$DMD^{-1}=DMD=\left[\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n,p} \\ \hline 0_{p,n} & -I_p \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline A & 0_p \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n,p} \\ \hline 0_{p,n} & -I_p \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} 0_n & -B \\ \hline -A & 0_p \end{array}\right].$$

Soit :

$$\boxed{DMD^{-1}=-M}$$

Ainsi :

$$\boxed{M \text{ est semblable à } -M.}$$

6. On a $u(F)\subset G$, donc pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $u(f_j)\in G$, soit $u(f_j)=a_{1,j}g_1+...+a_{p,j}g_p$.

De même, $u(G)\subset F$, donc pour tout $j\in[\![1,p]\!]$, $u(g_j)\in F$, soit $u(g_j)=b_{1,j}f_1+...+b_{n,j}f_n$.

Alors, en posant $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on a :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(u)=\left[\begin{array}{c|c}0_n & B\\ \hline A & 0_p\end{array}\right]}$$

7. Si F est nul, alors $E=F\oplus G$ et $u(E)=u(G)\subset F=\{0\}$. Alors, u est nul et on peut écrire $u=a+b$ avec $a=b=0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $a^2=b^2=0_{\mathcal{L}(E)}$. La condition **(*C2*)** est donc vérifiée. Il en va bien entendu de même si G est nul (F et G jouent le même rôle).

Si F et G tous deux non nuls, soient $a\in\mathcal{L}(E)$ et $b\in\mathcal{L}(E)$ tels que :

$$M_{\mathcal{B}}(a)=\left[\begin{array}{c|c}0_n & 0_{n,p}\\ \hline A & 0_p\end{array}\right] \text{ et } M_{\mathcal{B}}(b)=\left[\begin{array}{c|c}0_n & B\\ \hline 0_{p,n} & 0_p\end{array}\right].$$

On a alors :

- D'après la question **6**, $M_{\mathcal{B}}(a+b)=\left[\begin{array}{c|c}0_n & B\\ \hline A & 0_p\end{array}\right]=M_{\mathcal{B}}(u)$, donc $u=a+b$.
- D'après la question **4**, $M_{\mathcal{B}}(a^2)=\left(M_{\mathcal{B}}(a)\right)^2=0_{n+p}$ et $M_{\mathcal{B}}(b^2)=\left(M_{\mathcal{B}}(b)\right)^2=0_{n+p}$.

Ainsi, la condition **(*C2*)** est donc vérifiée dans tous les cas.

Or, d'après la question **5**, $M_{\mathcal{B}}(u)$ est semblable à $-M_{\mathcal{B}}(u)$, donc u est semblable à $-u$ et ainsi, la condition **(*C3*)** est vérifiée.

Finalement :

$$\boxed{u \text{ vérifie les conditions } \mathbf{(C2)} \text{ et } \mathbf{(C3)}.}$$

C - La condition (*C2*) implique la condition (*C1*) : cas d'un automorphisme

8. Si $f^2=0$, alors pour tout $x\in E$, $f\left(f(x)\right)=0$, donc :

$$\boxed{\operatorname{Im} f\subset\ker f}$$

L'inclusion ci-dessus implique que $rg\,(f)\le\dim\left(\ker f\right)$. Or, d'après le théorème du rang, on a :

$$rg\,(f)+\dim\left(\ker f\right)=\dim E.$$

Donc, $\dim E\le 2\dim\left(\ker f\right)$, soit :

$$\boxed{\dim\left(\ker f\right)\ge\frac{\dim E}{2}}$$

9. Dans toute la suite, on note $\dim E = n$.

On a $u = a+b \in GL(E)$, donc :

$$n = rg\,(u) = rg\,(a+b).$$

Or, $\mathrm{Im}\,(a+b) \subset \mathrm{Im}\,a + \mathrm{Im}\,b$, donc :

$$n = rg\,(a+b) \leq rg\,(a) + rg\,(b) - \dim\left(\mathrm{Im}\,a \cap \mathrm{Im}\,b\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{n + \dim\left(\mathrm{Im}\,a \cap \mathrm{Im}\,b\right) \leq rg\,(a) + rg\,(b)} \quad \mathbf{(1)}.$$

De plus, $a^2 = b^2 = 0$, donc :

$$\left.\begin{array}{l} n - rg\,(a) = \dim\left(\ker a\right) \geq \dfrac{n}{2} \quad \Rightarrow \quad rg\,(a) \leq \dfrac{n}{2} \\ n - rg\,(b) = \dim\left(\ker b\right) \geq \dfrac{n}{2} \quad \Rightarrow \quad rg\,(b) \leq \dfrac{n}{2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{rg\,(a) + rg\,(b) \leq n} \quad \mathbf{(2)}.$$

Les inégalités **(1)** et **(2)** donnent alors :

$$n + \dim\left(\mathrm{Im}\,a \cap \mathrm{Im}\,b\right) \leq n \quad \Rightarrow \quad \dim\left(\mathrm{Im}\,a \cap \mathrm{Im}\,b\right) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \dim\left(\mathrm{Im}\,a \cap \mathrm{Im}\,b\right) = 0.$$

Ainsi :

$$\mathrm{Im}\,a \cap \mathrm{Im}\,b = \{0\}.$$

Et **(1)** et **(2)** donnent :

$$rg\,(a) + rg\,(b) = n.$$

On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} E = \mathrm{Im}\,(a+b) \subset \mathrm{Im}\,a + \mathrm{Im}\,b \\ \dim\left(\mathrm{Im}\,a\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\,b\right) = n \\ \mathrm{Im}\,a \cap \mathrm{Im}\,b = \{0\} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{E = \mathrm{Im}\,a \oplus \mathrm{Im}\,b}.$$

De plus, toujours avec le théorème du rang :

$$rg\,(a) + rg\,(b) = n \quad \Leftrightarrow \quad n - \dim\left(\ker a\right) + n - \dim\left(\ker b\right) = n \quad \Leftrightarrow \quad \dim\left(\ker a\right) + \dim\left(\ker b\right) = n.$$

Enfin, toujours avec $a^2 = b^2 = 0$, on a :

$$\mathrm{Im}\,a \subset \ker a \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,b \subset \ker b.$$

Si l'une de ces deux inclusions est stricte, par exemple $\mathrm{Im}\,a \subset \ker a$, alors $rg\,(a) < \dim\left(\ker a\right)$, et avec $rg\,(b) \leq \dim\left(\ker b\right)$, donc :

$$n = rg\,(a) + rg\,(b) < \dim\left(\ker a\right) + \dim\left(\ker b\right) = n.$$

Ceci est absurde, donc :

$$\underline{\mathrm{Im}\,a = \ker a} \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{Im}\,b = \ker b}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{E = \ker a \oplus \ker b \ \text{ avec } \ \ker a = \mathrm{Im}\,a \ \text{ et } \ \ker b = \mathrm{Im}\,b.}$$

10. On a $E=\ker a\oplus\ker b$. Si on arrive à prouver que $u(\ker a)\subset\ker b$ et $u(\ker b)\subset\ker a$.

Or, pour tout $x\in\ker a$, on a :

$$u(x)=a(x)+b(x)=b(x)\in\operatorname{Im}b=\ker b.$$

Ceci prouve que $u(\ker a)\subset\ker b$.

Comme a et b jouent le même rôle, on a de même $u(\ker b)\subset\ker a$. Ainsi :

$$E=\ker a\oplus\ker b \text{ avec } u(\ker a)\subset\ker b \text{ et } u(\ker b)\subset\ker a.$$

Comme $\ker a$ et $\ker b$ sont des sous-espaces vectoriels de *E*, ceci prouve que :

$$\boxed{\text{L'automorphisme } u \text{ est échangeur.}}$$

D - Intermède : un principe de décomposition

11. Soit $k\in\mathbb{N}$. On veut $\ker v^k\subset\ker v^{k+1}$.

Soit $x\in\ker v^k$. On a :

$$v^{k+1}(x)=v\left(v^k(x)\right)=v(0)=0.$$

Donc, $x\in\ker v^{k+1}$ et ainsi, $\ker v^k\subset\ker v^{k+1}$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\ker v^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est croissante pour l'inclusion.}}$$

12. On a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\dim\left(\ker v^k\right)\in[\![0,n]\!]$ (avec $n=\dim E$). $n=\dim E$

L'ensemble $\left\{\dim\left(\ker v^k\right),k\in\mathbb{N}\right\}$ est donc une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée (par *n*) : elle admet un plus grand élément $m\in[\![0,n]\!]$ et il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $m=\dim\left(\ker v^p\right)$.

On a alors pour tout $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geq p$:

- $\dim\left(\ker v^k\right)\leq m=\dim\left(\ker v^p\right)$ car $m=\max\left\{\dim\left(\ker v^k\right),k\in\mathbb{N}\right\}$;
- $\ker v^p\subset\ker v^k$ car $\left(\ker v^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, donc $\dim\left(\ker v^p\right)\leq\dim\left(\ker v^k\right)$.

Donc, $\dim\left(\ker v^k\right)=\dim\left(\ker v^p\right)$ et avec $\ker v^p\subset\ker v^k$, on obtient :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k\geq p,\ \ker v^p=\ker v^k.}$$

Comme pour tout entier $k\geq p$, $\ker v^k=\ker v^p$, on a $\ker v^p=\bigcup_{k\geq p}\ker v^k$. Alors :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\ker v^k=\bigcup_{k\in[\![0,p]\!]}\ker v^k.$$

Or, $\ker v^0 \subset \ker v^1 \subset ... \subset \ker v^p$, donc $\bigcup_{k\in[\![0,p]\!]} \ker v^k = \ker v^p$ et ainsi :

$$\boxed{\ker v^p = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker v^k}$$

Enfin, pour tout entier $k \geq p$, on a $\ker v^p = \ker v^{p+1} = \ker v^k$. Donc, si p est impair, on peut le remplacer par $p+1$ et ainsi :

$$\boxed{p \text{ peut être choisi parmi les entiers pairs.}}$$

13. D'après ce qui précède, on a $\ker v^k = \ker v^p = E_\lambda^c(f)$ pour tout entier $k \geq p$. En particulier, pour $k = 2p \geq p$:

$$\boxed{\ker v^{2p} = \ker v^p = E_\lambda^c(f)}$$

On veut $E = E_\lambda^c(f) \oplus \operatorname{Im} v^p$, soit $E = \ker v^p \oplus \operatorname{Im} v^p$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim E = \dim\left(\ker v^p\right) + \dim\left(\operatorname{Im} v^p\right)$. Il suffit donc de prouver que $\ker v^p \cap \operatorname{Im} v^p = \{0\}$.

Soit $x \in \ker v^p \cap \operatorname{Im} v^p$. On a $v^p(x) = 0$ et il existe $z \in E$ tel que $x = v^p(z)$. Alors :

$$v^p(x) = v^p\left(v^p(z)\right) = v^{2p}(z) = 0 \quad \text{donc} \quad z \in \ker v^{2p} = \ker v^p \quad \text{donc} \quad x = v^p(z) = 0.$$

Ceci prouve que $\ker v^p \cap \operatorname{Im} v^p = \{0\}$ et avec la relation sur les dimensions vue plus haut, on obtient $E = \ker v^p \oplus \operatorname{Im} v^p$, soit :

$$\boxed{E = E_\lambda^c(f) \oplus \operatorname{Im} v^p}$$

On a $v^p = (f - \lambda Id_E)^p$, donc l'endomorphisme v^p est un polynôme en *f* : il commute avec *f*.

On peut alors immédiatement conclure que :

$$\boxed{E_\lambda^c(f) = \ker v^p \text{ et } \operatorname{Im} v^p \text{ sont stables par } f.}$$

14. Comme $\operatorname{Im} v^p$ est stable par *f*, il est légitime de parler l'endomorphisme induit par *f* sur $\operatorname{Im} v^p$, que nous noterons $\tilde{f}$. Supposons que λ est valeur propre de $\tilde{f}$. Il existe alors $x \in \operatorname{Im} v^p \setminus \{0\}$, un vecteur propre associé à λ.

On a $v = f - \lambda Id_E$, donc $f = v + \lambda Id_E$ et :

$$\tilde{f}(x) = f(x) = v(x) + \lambda x = \lambda x.$$

On a donc $v(x) = 0$, soit $x \in \ker v$.

On a $p \geq 1$, car λ est valeur propre de $\tilde{f}$, donc de f, et ainsi, $\ker v \neq \{0\} = \ker v^0$. On a alors $\ker v \subset \ker v^p$ et donc, $x \in \ker v^p$. Ainsi, $x \in \ker v^p \cap \operatorname{Im} v^p = \{0\}$, ce qui est absurde (car $x \neq 0$).

Finalement :

λ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} v^p$.

On suppose que $E_\lambda^c(f) \neq \{0\}$, soit $\ker\left((f - \lambda Id_E)^p\right) \neq \{0\}$, donc $(f - \lambda Id_E)^p \notin GL(E)$, ce qui implique que $f - \lambda Id_E \notin GL(E)$ et donc que $\ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\}$, autrement dit, λ est valeur propre de f.

Comme $E_\lambda^c(f)$ est stable par f, il est légitime de parler l'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda^c(f)$, que nous noterons $\underset{\sim}{f}$.

Comme nous sommes dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\underset{\sim}{f}$ admet au moins une valeur propre μ

Soit $x \in E_\lambda^c(f) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé.

On a $\underset{\sim}{f}(x) = f(x) = v(x) + \lambda x = \mu x$, donc $v(x) = (\mu - \lambda) x$, et, comme $x \in E_\lambda^c(f) = \ker v^p$:

$$(\mu - \lambda)\ v^{p-1}(x) = v^{p-1}\left((\mu - \lambda)x\right) = v^p(x) = 0.$$

Supposons que pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, on a $(\mu - \lambda)^k\ v^{p-k}(x) = 0$, alors :

$$(\mu - \lambda)^{k+1}\ v^{p-(k+1)}(x) = (\mu - \lambda)^k v^{p-k-1}\left((\mu - \lambda)x\right) = (\mu - \lambda)^k v^{p-k-1}\left(v(x)\right) = (\mu - \lambda)^k v^{p-k}(x) = 0.$$

Ceci prouve par récurrence finie que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $(\mu - \lambda)^k\ v^{p-k}(x) = 0$.

En particulier pour $k = p$, on obtient $(\mu - \lambda)^p x = 0$. Comme $x \neq 0$, ceci donne $\mu = \lambda$ et ainsi :

Si $E_\lambda^c(f) \neq \{0\}$, alors λ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda^c(f)$.

15. On note à nouveau $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} v^p$. Comme E est une $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\tilde{f}$ possède au moins une valeur propre et d'après la question précédente, ce n'est pas λ.

Comme toute valeur propre de $\tilde{f}$ est valeur propre de f (car $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in \operatorname{Im} v^p$) et comme toute valeur propre de f différente de λ est, par hypothèse ici, égale à μ, la seule valeur propre de $\tilde{f}$ est μ.

Alors, si $r = rg\,(v^p)$, on a :

$$\chi_{\tilde{f}} = (X - \mu)^r.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a alors $\chi_{\tilde{f}}(\tilde{f}) = (\tilde{f} - \mu\, id_{\operatorname{Im} v^p})^r = 0$, donc pour tout $x \in \operatorname{Im} v^p$, $(f - \mu\, id_E)^r(x) = (\tilde{f} - \mu\, id_{\operatorname{Im} v^p})^r(x) = 0$ et ainsi :

$$\operatorname{Im} v^p \subset \ker\left((f - \mu\, id_E)^r\right).$$

Or, $\ker\left((f-\mu\, id_E)^r\right) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker\left((f-\mu\, id_E)^k\right) = E_\mu^c(f)$, donc :

$$\boxed{\operatorname{Im} v^p \subset E_\mu^c(f)}$$

D'après la question **13**, on a $E = E_\lambda^c(f) \oplus \operatorname{Im} v^p$ et d'après ce qui précède, $\operatorname{Im} v^p \subset E_\mu^c(f)$, donc :

$$E = E_\lambda^c(f) + E_\mu^c(f).$$

Reste à prouver que la somme est directe.

Supposons que $E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f) \neq \{0\}$. Comme $E_\lambda^c(f)$ et $E_\mu^c(f)$ sont stables par *f*, $E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f)$ l'est aussi et il est légitime de parler l'endomorphisme $\widehat{f}$ induit par *f* sur $E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f)$.

Comme $E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f) \neq \{0\}$, $\widehat{f}$ admet une valeur propre et, d'après la question **14** :

- $E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f) \subset E_\lambda^c(f)$, donc λ est l'unique valeur propre de $\widehat{f}$.
- $E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f) \subset E_\mu^c(f)$, donc μ est l'unique valeur propre de $\widehat{f}$.

Comme $\lambda \neq \mu$, ceci est absurde et donc $E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f) = \{0\}$. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)}$$

E - La condition (*C2*) implique la condition (*C1*) : cas non bijectif

16. On a $u^2 = a^2 + b^2 + ab + ba = ab + ba$, donc :

$$\left.\begin{aligned} au^2 &= a^2b + aba = aba \\ u^2a &= aba + ba^2 = aba \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad au^2 = u^2a.$$

On obtient de même $bu^2 = u^2b$ et donc :

$$\boxed{a \text{ et } b \text{ commutent avec } u^2.}$$

17. Comme les endomorphismes *a* et *b* commutent avec u^2, ils commutent avec toute puissance de u^2, donc avec toute puissance paire de *u*, en particulier u^p (car *p* est pair).

On a alors immédiatement :

$$\boxed{G = \operatorname{Im} u^p \text{ est stable par } a \text{ et } b.}$$

Pour tout $x \in G$, on a $a_G(x) = a(x) \in G$ et $a_G^2(x) = a_G\left(a(x)\right) = a^2(x) = 0$. Donc, $a_G^2 = 0$.

Il en va de même pour b_G, donc :

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } a_G \text{ et } b_G \text{ induits par } a \text{ et } b \text{ sur } G = \operatorname{Im} u^p \text{ sont de carré nul.}}$$

18. D'après la question **13**, on a $E = E_0^c(u) \oplus \operatorname{Im} u^p = F \oplus G$ avec $F = E_0^c(u)$.

On a vu dans la question **13** que G et F sont stables par u et que G est stable par a et b (d'après la question précédente).

Notons u_G et u_F les endomorphismes induits par u sur G et F respectivement.

- D'après la question **14**, 0 n'est pas valeur propre de u_G, donc u_G est bijectif. De plus, comme $u = a + b$, on a $u_G = a_G + b_G$ avec $a_G^2 = b_G^2 = 0$ (question précédente).

  Alors, d'après la partie C, u_G est échangeur : il existe deux sous-espaces de G (donc de E), G_1 et G_2, tels que $G = G_1 \oplus G_2$, $u_G(G_1) = u(G_1) \subset G_2$ et $u_G(G_2) = u(G_2) \subset G_1$.

- $F = E_0^c(u)$ n'est pas nul car, $\ker u^p = \{0\}$ implique que u^p, donc u est bijectif, ce qui contredit l'hypothèse. Alors, toujours d'après la question **14**, 0 est l'unique valeur propre de u_F.

  Ceci veut dire que le polynôme caractéristique de u_F est $X^{\dim F}$ et donc que $u_F^{\dim F} = 0$ (Cayley-Hamilton) et donc que u_F nilpotent. D'après le théorème admis, u_F est échangeur : il existe deux sous-espaces de F (donc de E), F_1 et F_2, tels que $F = F_1 \oplus F_2$, $u_F(F_1) = u(F_1) \subset F_2$ et $u_F(F_2) = u(F_2) \subset F_1$.

Alors, en posant $V = F_1 \oplus G_1$ et $W = F_2 \oplus G_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} &E = F \oplus G = F_1 \oplus F_2 \oplus G_1 \oplus G_2 = F_1 \oplus G_1 \oplus F_2 \oplus G_2 = V \oplus W \\ &u(V) = u(F_1 \oplus G_1) \subset u(F_1) + u(G_1) \subset F_2 + G_2 = F_2 \oplus G_2 = W \\ &u(W) = u(F_2 \oplus G_2) \subset u(F_2) + u(G_2) \subset F_1 + G_1 = F_1 \oplus G_1 = V \end{aligned}$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{u \text{ est échangeur.}}$$

F - La condition (*C3*) implique la condition (*C1*)

19. On a $\varphi u \varphi^{-1} = -u$, donc $\varphi u = -u\varphi$ et :

$$\varphi^2 u = \varphi(\varphi u) = \varphi(-u\varphi) = -(\varphi u)\varphi = -(-u\varphi)\varphi = u\varphi^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi^2 \text{ et } u \text{ commutent.}}$$

20. Soit λ une valeur propre de φ^2. On pose $v = \varphi^2 - \lambda id_E$ et on utilise les notations de la partie D.

On a alors $E_\lambda^c(\varphi^2) \neq \{0\}$ et d'après la question **13**, on a $E = E_\lambda^c(\varphi^2) \oplus \operatorname{Im} v^p$.

Comme v^p est un polynôme en φ^2, u et v^p commutent et donc $E_\lambda^c(\varphi^2) = \ker v^p$ et $\operatorname{Im} v^p$ sont stables par u. On note u_k et u_i les endomorphismes induits par u sur $E_\lambda^c(\varphi^2)$ et $\operatorname{Im} v^p$ respectivement.

De même, v^p est un polynôme en φ^2, donc en φ, et v^p commute avec φ : $E_\lambda^c(\varphi^2)$ et $\operatorname{Im} v^p$ sont stables par φ. Notons alors φ_k et φ_i les endomorphismes induits par φ sur $E_\lambda^c(\varphi^2)$ et $\operatorname{Im} v^p$ respectivement. Comme $\varphi \in GL(E)$, on a $\varphi_k \in GL\left(E_\lambda^c(\varphi^2)\right)$ et $\varphi_i \in GL\left(\operatorname{Im} v^p\right)$. Alors :

- Pour tout $x \in E_\lambda^c(\varphi^2)$, on a $u_k(x) \in E_\lambda^c(\varphi^2)$ et $\varphi_k(x) \in E_\lambda^c(\varphi^2)$, d'où :
$$\varphi_k u_k(x) = \varphi_k\left(u_k(x)\right) = \varphi\left(u(x)\right) = -u\left(\varphi(x)\right) = -u_k\left(\varphi_k(x)\right) = -u_k\varphi_k(x).$$
Donc, $\varphi_k u_k = -u_k\varphi_k$ et comme $\varphi_k \in GL\left(E_\lambda^c(\varphi^2)\right)$, u_k vérifie **(*C3*)**.

- Pour tout $x \in \operatorname{Im} v^p$, on a $u_i(x) \in \operatorname{Im} v^p$ et $\varphi_i(x) \in \operatorname{Im} v^p$, d'où :
$$\varphi_i u_i(x) = \varphi_i\left(u_i(x)\right) = \varphi\left(u(x)\right) = -u\left(\varphi(x)\right) = -u_i\left(\varphi_i(x)\right) = -u_i\varphi_i(x).$$
Donc, $\varphi_i u_i = -u_i\varphi_i$ et comme $\varphi_i \in GL\left(\operatorname{Im} v^p\right)$, u_i vérifie **(*C3*)**.

Comme $E_\lambda^c(\varphi^2) \neq \{0\}$, on a alors, $\operatorname{Im} v^p = \{0\}$, car sinon *u* ne serait pas indécomposable.

Ceci implique que $E = E_\lambda^c(\varphi^2)$ et comme $E_\lambda^c(\varphi^2) \neq \{0\}$, d'après la question **14**, λ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par φ^2 sur $E = E_\lambda^c(\varphi^2)$, c'est-à-dire φ^2 lui-même. Ainsi :

$$\boxed{\varphi^2 \text{ possède une unique valeur propre } \lambda.}$$

Comme $\varphi \in GL(E)$, on a $\lambda \neq 0$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, non nul, tel que $\lambda = \alpha^2$.

Soit alors $\mu \in Sp(\varphi)$ et *x* un vecteur propre (non nul) associé à μ. On a $\varphi(x) = \mu x$, donc :
$$\varphi^2(x) = \mu\varphi(x) = \mu^2 x.$$

Ainsi, $\mu^2 \in Sp(\varphi^2)$, donc $\mu^2 = \lambda = \alpha^2$ et $\mu = \pm\alpha$. Ainsi :

$$\boxed{Sp(\varphi) \subset \{-\alpha, \alpha\} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } \alpha^2 = \lambda.}$$

21. La question **15** dit que si un endomorphisme *f* admet au plus deux valeurs propres, alors on a $E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)$. Or, on vient de prouver que φ admet au plus deux valeurs propres : $-\alpha$ et α, donc :
$$E = E_{-\alpha}^c(\varphi) \oplus E_\alpha^c(\varphi).$$

De plus, $E_{-\alpha}^c(\varphi) = \ker\left((\varphi + \alpha\, id_E)^{p_1}\right)$ et $E_\alpha^c(\varphi) = \ker\left((\varphi - \alpha\, id_E)^{p_2}\right)$ sont stables par φ (question **13**, avec p_1 et p_2 des entiers pairs, définis comme *p* dans question **12** pour $-\alpha$ et α).

Et, avec $\varphi \circ u = -u \circ \varphi$, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$u \circ (\varphi - z\, id_E) = u \circ \varphi - z\,u = -\varphi \circ u - z\,u = -(\varphi + z\, id_E) \circ u$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$u \circ (\varphi - z\, id_E)^{k+1} = u \circ (\varphi - z\, id_E) \circ (\varphi - z\, id_E)^k = -(\varphi + z\, id_E) \circ u \circ (\varphi - z\, id_E)^k.$$

Alors, on a $u\circ(\varphi - z\,id_E)^0 = u\circ id_E = id_E\circ u = (-1)^0(\varphi + z\,id_E)^0\circ u$ et si, pour $k\in\mathbb{N}$ donné , on a $u\circ(\varphi - z\,id_E)^k = (-1)^k(\varphi + z\,id_E)^k\circ u$, alors :

$$\begin{aligned} u\circ(\varphi - z\,id_E)^{k+1} &= -(\varphi + z\,id_E)\circ u\circ(\varphi - z\,id_E)^k \\ &= -(\varphi + z\,id_E)\circ\left[(-1)^k(\varphi + z\,id_E)^k\circ u\right] \text{ par hypothèse de récurrence}. \\ &= (-1)^{k+1}(\varphi + z\,id_E)^{k+1}\circ u \end{aligned}$$

Donc la relation est vraie pour $k+1$.

Ceci prouve par récurrence que pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$u\circ(\varphi - z\,id_E)^k = (-1)^k(\varphi + z\,id_E)^k\circ u .$$

En particulier, pour $(z,k) = (-\alpha, p_1)$ et $(z,k) = (\alpha, p_2)$, avec p_1 et p_2 pairs, on a :

$$u\circ(\varphi + \alpha\,id_E)^{p_1} = (\varphi - \alpha\,id_E)^{p_1}\circ u \quad \text{et} \quad u\circ(\varphi - \alpha\,id_E)^{p_2} = (\varphi + \alpha\,id_E)^{p_2}\circ u .$$

Alors, pour tout $x\in E_\alpha^c(\varphi) = \ker\left((\varphi - \alpha\,id_E)^{p_2}\right)$, on a $(\varphi - \alpha\,id_E)^{p_2}(x) = 0$, donc :

$$(\varphi + \alpha\,id_E)^{p_2}(u(x)) = \left[(\varphi + \alpha\,id_E)^{p_2}\circ u\right](x) = \left[u\circ(\varphi - \alpha\,id_E)^{p_2}\right](x) = u\left((\varphi - \alpha\,id_E)^{p_2}(x)\right) = 0 .$$

Ainsi, $u(x)\in\ker\left((\varphi + \alpha\,id_E)^{p_1}\right) = E_{-\alpha}^c(\varphi)$. Ceci prouve que :

$$u\left(E_\alpha^c(\varphi)\right)\subset E_{-\alpha}^c(\varphi) .$$

De même, avec $u\circ(\varphi + \alpha\,id_E)^{p_1} = (\varphi - \alpha\,id_E)^{p_1}\circ u$, on prouve que :

$$u\left(E_{-\alpha}^c(\varphi)\right)\subset E_\alpha^c(\varphi) .$$

Finalement, on a trouvé deux sous-espaces de *E*, $E_\alpha^c(\varphi)$ et $E_{-\alpha}^c(\varphi)$, tels que :

$$\begin{cases} E = E_{-\alpha}^c(\varphi)\oplus E_\alpha^c(\varphi) \\ u\left(E_\alpha^c(\varphi)\right)\subset E_{-\alpha}^c(\varphi) \\ u\left(E_{-\alpha}^c(\varphi)\right)\subset E_\alpha^c(\varphi) \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{u \text{ est échangeur.}}$$

22. Procédons par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}^*$ pour prouver que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie *n* vérifiant la condition ***(C3)***, vérifie aussi la condition ***(C1)***, autrement dit est échangeur.

Initialisation : $n = 1$.

On considère donc *E* un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 (une droite). Les endomorphismes de *E* sont alors les homothéties.

Soit $u=\lambda id_E \in \mathcal{L}(E)$ (avec $\lambda\in\mathbb{C}$) vérifiant **(*C3*)**. Il existe donc $\varphi\in GL(E)$ tel que $\varphi u\varphi^{-1}=-u$, soit :

$$\varphi(\lambda id_E)\varphi^{-1}=-\lambda id_E \quad\Leftrightarrow\quad \lambda id_E=-\lambda id_E \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=-\lambda \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=0.$$

Donc, $u=0_{\mathcal{L}(E)}$ et dans ce cas, on a $E=E\oplus\{0\}$, avec $u(E)=\{0\}$ et $u\big(\{0\}\big)=\{0\}\subset E$, donc u est échangeur et la propriété est vraie au rang $n=1$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n\in\mathbb{N}^*$.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n+1$ et u un endomorphisme de E vérifiant la condition **(*C3*)**.

Si u est indécomposable, alors il est échangeur d'après la question précédente et donc vérifie la condition **(*C1*)**.

Si u n'est pas indécomposable, alors il existe F et G, deux sous-espaces supplémentaires de E, non nuls, stables par u et tels que les endomorphismes u_F et u_G induits par u sur F et G respectivement vérifient tous deux la condition **(*C3*)**. Comme F et G ne sont pas réduits à $\{0\}$, il sont tous le deux de dimension comprise entre 1 et n. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à u_F et u_G, autrement dit, ces deux endomorphismes vérifient condition **(*C1*)**,. Ainsi, il existe quatre sous-espaces de E, F_1, F_2, G_1 et G_2 tels que :

$$\begin{cases} F=F_1\oplus F_2 \\ G=G_1\oplus G_2 \\ u_F(F_1)\subset F_2 \\ u_F(F_2)\subset F_1 \\ u_G(G_1)\subset G_2 \\ u_G(G_2)\subset G_1 \end{cases}$$

En posant $H=F_1\oplus G_1$ et $K=F_2\oplus G_2$, on a :

$$\begin{cases} E=F\oplus G=(F_1\oplus F_2)\oplus(G_1\oplus G_2)=(F_1\oplus G_1)\oplus(F_2\oplus G_2)=H\oplus K \\ u(H)=u_F(F_1)\oplus u_G(G_1)\subset F_2\oplus G_2=K \\ u(K)=u_F(F_2)\oplus u_G(G_2)\subset F_1\oplus G_1=H \end{cases}$$

Ainsi, il existe H et K, deux sous-espaces supplémentaires de E, tels que $E=H\oplus K$, $u(H)\subset K$ et $u(K)\subset H$, donc u est échangeur.

Finalement, u est échangeur dans tous les cas et la propriété est vraie au rang $n+1$

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et donc :

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie vérifiant la condition **(*C3*)**, vérifie aussi la condition **(*C1*)**.