Corrigés des TD du chapitre 14

Exercice 1

1) La variable *X* suit une loi géométrique de paramètre *p* (par définition d'une loi géométrique). Son espérance est alors $E(X)=\dfrac{1}{p}$.

2) Pour tout $n,k\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X=n,Y=n+k)=P(X=n)P_{(X=n)}(Y=n+k).$$

Or, l'expérience est répétée de manière indépendante, donc si le premier succès a lieu au rang *n*, le succès suivant peut être vu comme le premier succès à partie de la $(n+1)^{\text{ième}}$ répétition de l'expérience, donc son rang suivra (comme *X*) une loi géométrique de paramètre *p*. Ainsi, $P_{(X=n)}(Y=n+k)=(1-p)^{k-1}p$ et donc :

$$P(X=n,Y=n+k)=(1-p)^{n-1}p(1-p)^{k-1}p.$$

Soit, pour tout $n,k\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P(X=n,Y=n+k)=(1-p)^{n+k-2}p^2}$$

3) Pour tout $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geq 2$, on a :

$$P(Y=k)=\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i,Y=k)=\sum_{i=1}^{k-1}(1-p)^{k-2}p^2=(k-1)(1-p)^{k-2}p^2$$

Remarquons que $P(Y=1)=0$, ce qui est compatible avec la formule ci-dessus.

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P(Y=k)=(k-1)(1-p)^{k-2}p^2}$$

On a alors :

$$G_Y(t)=\sum_{k=2}^{+\infty}P(Y=k)t^k=\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)(1-p)^{k-2}p^2t^k=p^2t^2\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)\left[(1-p)t\right]^{k-2}=p^2t^2\sum_{k=2}^{+\infty}k\left[(1-p)t\right]^{k-1}.$$

Soit $G_Y(t)=p^2t^2f'\big((1-p)t\big)$ avec $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\dfrac{1}{1-x}$.

La série entière f est définie et de classe C^∞ sur $]-1,1[$, avec :

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Donc G_Y est définie sur $\left]-\dfrac{1}{1-p},\dfrac{1}{1-p}\right[$ et :

$$\boxed{G_Y(t)=\frac{p^2t^2}{\big(1-(1-p)t\big)^2}}$$

La fonction G_Y est définie et de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{1-p},\frac{1}{1-p}\right[$ et :

$$G_Y'(t)=\frac{2p^2t}{\left(1-(1-p)t\right)^3} \qquad G_Y''(t)=2p^2\frac{1+2(1-p)t}{\left(1-(1-p)t\right)^4}.$$

On a $E(Y)=G_Y'(1)=\frac{2p^2}{\left(1-(1-p)\right)^3}$, soit :

$$\boxed{E(Y)=\frac{2}{p}}$$

Et :

$$V(Y)=G_Y''(1)+G_Y'(1)-G_Y'(1)^2=2p^2\frac{1+2(1-p)}{\left(1-(1-p)\right)^4}+\frac{2}{p}-\frac{4}{p^2}.$$

Soit :

$$\boxed{V(Y)=\frac{2(1-p)}{p^2}}$$

Exercice 2

1) a. On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$, donc X et Y prennent un nombre fini de valeurs. Il en va alors de même pour Z et T, donc :

$$\boxed{Z \text{ et } T \text{ admettent des moments de tous ordres.}}$$

b. On a $Z=|X-Y|$ et, comme $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$, on a aussi $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$.

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a $(Z=k)=(|X-Y|=k)=(X-Y=k)\cup(X-Y=-k)=(X=Y+k)\cup(Y=X+k)$ et comme $k>0$, l'union est disjointe.

Alors, comme X et Y sont indépendantes et suivent la même loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=\sum_{i=0}^{n-k}P(X=i+k,Y=i)+\sum_{i=0}^{n-k}P(X=i,Y=i+k)\\&=\sum_{i=0}^{n-k}P(X=i+k)P(Y=i)+\sum_{i=0}^{n-k}P(X=i)P(Y=i+k)\\&=\sum_{i=0}^{n-k}\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n+1}+\sum_{i=0}^{n-k}\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n+1}\\&=2\frac{n-k+1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Enfin :

$$P(Z=0)=P(X=Y)=\sum_{i=0}^{n}P(X=i,Y=i)=\frac{n+1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n+1}.$$

On a alors :

$$E(Z)=\sum_{k=0}^{n}kP(Z=k)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{2(n-k+1)}{(n+1)^2}=\frac{2}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)$$
$$=\frac{2}{(n+1)^2}\left[(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2\right]=\frac{2}{(n+1)^2}\left[(n+1)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$
$$=\frac{n}{3(n+1)}\left[3(n+1)-(2n+1)\right]$$

Soit :

$$\boxed{E(Z)=\frac{n(n+2)}{3(n+1)}}$$

c. On a $E(X)=E(Y)=\dfrac{n}{2}$ et :

$$T=\inf(X,Y)=\frac{1}{2}\big(X+Y-|X-Y|\big)=\frac{1}{2}\big(X+Y-Z\big).$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$E(T)=\frac{1}{2}\big(E(X)+E(Y)-E(Z)\big)=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-\frac{n(n+2)}{3(n+1)}\right)=\frac{n}{2}\left(1-\frac{n+2}{3(n+1)}\right).$$

Soit :

$$\boxed{E(T)=\frac{n(2n+1)}{6(n+1)}}$$

On a alors :

$$\boxed{E(T)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{3}}$$

2) a. On a $U(\Omega)\subset[\![0,K]\!]$ et :

$$\sum_{k=1}^{K}P(U\geq k)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=k}^{K}P(U=i)=\sum_{1\leq k\leq i\leq K}P(U=i)=\sum_{i=1}^{K}\sum_{k=1}^{i}P(U=i)=\sum_{i=1}^{K}i\,P(U=i)=\sum_{i=0}^{K}i\,P(U=i)\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{K}P(U\geq k)=E(U)}$$

Remarquons que cette question est une question de cours.

b. On a :

$$\sum_{k=1}^{K}k^2P(U\geq k)=\sum_{k=1}^{K}\left(k^2\sum_{i=k}^{K}P(U=i)\right)=\sum_{1\leq k\leq i\leq K}k^2P(U=i)=\sum_{i=1}^{K}\sum_{k=1}^{i}k^2P(U=i)=\sum_{i=1}^{K}\left(P(U=i)\sum_{k=1}^{i}k^2\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{K}\left(P(U=i)\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}\right)=\frac{1}{6}\left[2\sum_{i=0}^{K}P(U=i)i^3+3\sum_{i=1}^{K}P(U=i)i^2+\sum_{i=1}^{K}P(U=i)i\right]$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{K} k^2 P(U \geq k) = \frac{2E(U^3)+3E(U^2)+E(U)}{6}}$$

3) a. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a (toujours avec X et Y indépendantes) :

$$P(T \geq k) = P\big(\inf(X,Y) \geq k\big) = P\big((X \geq k) \bigcap (Y \geq k)\big) = P(X \geq k)P(Y \geq k).$$

Et on a :

$$P(X \geq k) = P(Y \geq k) = \begin{cases} 1 & \text{quand } k < 0 \\ \dfrac{n+1-k}{n+1} & \text{quand } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{quand } k > n \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{P(T \geq k) = \begin{cases} 1 & \text{quand } k < 0 \\ \left(\dfrac{n+1-k}{n+1}\right)^2 & \text{quand } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{quand } k > n \end{cases}}$$

b. D'après la question 2.a, on a :

$$E(T) = \sum_{k=1}^{n} P(T \geq k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1-k}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2 \underset{k'=n+1-k}{=} \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k'=1}^{n} k'^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{On retrouve bien } E(T) = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)} \text{ trouvé dans la question 1.c.}}$$

4) On a $Z^2 = |X-Y|^2 = (X-Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$ et par linéarité de l'espérance :

$$E(Z^2) = E(X^2 - 2XY + Y^2) = E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2).$$

Comme X et Y sont indépendantes, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$, donc :

$$E(Z^2) = E(X^2 - 2XY + Y^2) = E(X^2) - 2E(X)E(Y) + E(Y^2).$$

Et comme X et Y sont indépendantes et suivent la même loi, $E(X) = E(Y)$ et $E(X^2) = E(Y^2)$, donc :

$$E(Z^2) = 2E(X^2) - 2E(X)^2.$$

Soit :

$$\boxed{E(Z^2) = 2V(X)}$$

Exercice 3

1) Remarquons préalablement la longueur de la première série de lancers ayant tous donné le même résultat peut aller de 1 (quand le deuxième lancer donne un résultat différent du premier) à l'infini quand tous les lancers donne le même résultat. Ainsi, $L(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'évènement $(L=n)$ se réalise quand les n premiers lancers donnent le même résultat et pas le $(n+1)^{\text{ième}}$. Il y a deux possibilités disjointes : soit n piles suivi d'un face (probabilité : $p^n q$), soit n faces suivi d'un pile (probabilité : $q^n p$).

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P(L=n)=p^n q+q^n p}$$

2) Comme L est positive, l'absolue convergence de $\sum nP(L=n)$ équivaut à a sa convergence et, sous réserve de convergence :

$$E(L)=\sum_{n\geq 1} nP(L=n)=\sum_{n\geq 1} n\,(p^n q+q^n p)=pq\left(\sum_{n\geq 1} n\,p^{n-1}+\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}\right)=\frac{pq}{(1-p)^2}+\frac{pq}{(1-q)^2}=\frac{p(1-p)}{(1-p)^2}+\frac{p(1-p)}{p^2}.$$

Donc :

$$\boxed{E(L)=\frac{p}{1-p}+\frac{1-p}{p}}$$

3) On peut écrire $E(L)=g\left(\frac{1-p}{p}\right)$ avec $g(x)=x+\frac{1}{x}$.

Comme $p\in\,]0,1[$, on a $\frac{1-p}{p}=\frac{1}{p}-1\in\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$g(x)=x+\frac{1}{x}=2+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geq 2.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{E(L)\geq 2}$$

On a $g(x)=2+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=2$ si et seulement si $\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, soit $x=1$. Donc :

$$E(L)=2 \quad\Leftrightarrow\quad g\left(\frac{1-p}{p}\right)=2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1-p}{p}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{p}=2 \quad\Leftrightarrow\quad p=\frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{E(L)=2 \text{ si et seulement si la pièce est équilibrée } (p=\tfrac{1}{2}).}$$

4) On a :

$$E(L^2)=\sum_{n\geq 1} n^2P(L=n)=\sum_{n\geq 1} n^2\,(p^n q+q^n p)=pq\left(\sum_{n\geq 1} n^2p^{n-1}+\sum_{n\geq 1} n^2q^{n-1}\right).$$

Or, $\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1} = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$, donc :

$$E(L^2) = pq\left(\frac{1+p}{(1-p)^3} + \frac{1+q}{(1-q)^3}\right) = \frac{p(1-p)(1+p)}{(1-p)^3} + \frac{p(1-p)(2-p)}{p^3} = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} + \frac{(1-p)(2-p)}{p^2}.$$

Et :

$$\begin{aligned} V(L) = E(L^2) - E(L)^2 &= \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} + \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} - \left(\frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}\right)^2 \\ &= \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} + \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} - \frac{p^2}{(1-p)^2} - 2 - \frac{(1-p)^2}{p^2} \end{aligned}.$$

Soit :

$$\boxed{V(L) = \frac{p}{(1-p)^2} + \frac{1-p}{p^2} - 2}$$

On cherche un entier ℓ tel que $P(L \leq \ell) \geq 0,99$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a pour tout réel $a > 0$:

$$P\left(|L - E(L)| \geq a\right) \leq \frac{V(L)}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad P\left(|L - E(L)| < a\right) > 1 - \frac{V(L)}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad P\left(E(L) - a < L < E(L) + a\right) > 1 - \frac{V(L)}{a^2}.$$

Comme $L(\Omega) = \mathbb{N}^*$, si on choisit a tel que $E(L) - a \leq 1$, soit $a \geq E(L) - 1$ ($E(L) - 1 > 0$ car $E(L) \geq 2$), on a :

$$P\left(L < E(L) + a\right) > 1 - \frac{V(L)}{a^2}.$$

Et si on choisit a tel que $1 - \dfrac{V(L)}{a^2} \geq 0,99$, soit $a \geq \sqrt{\dfrac{V(L)}{0,01}}$, alors on a $P\left(L < E(L) + a\right) \geq 0,99$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } a = \max\left(E(L) - 1, \sqrt{\frac{V(L)}{0,01}}\right) \text{ et } \ell = \lfloor E(L) + a \rfloor, \text{ on a } P\left(L < \ell\right) \geq 0,99.}$$

Exercice 4

1) Dans le sac, il y a N jetons numérotés de 1 à N, donc N numéros distincts possibles. Comme T_n donne le nombre de numéros distincts obtenus à l'issue des n premiers tirages :

$$\boxed{\text{Les valeurs possibles de } T_n \text{ sont les entiers entre 1 et } n \text{ quand } n \leq N \text{ et entre 1 et } N \text{ quand } n \geq N.}$$

Comme on procède à n tirages avec remise (donc successifs) d'un jeton parmi N, il y a N^n possibilités pour les n premiers tirages et ces possibilités sont équiprobables.

L'évènement $(T_n = 1)$ est l'évènement : « Le même numéro est sorti à l'issue de chacun des n tirages ».

Comme il y a N numéros possibles, on a :

$$P(T_n = 1) = \frac{N}{N^n} = \frac{N}{N^{n-1}}.$$

L'évènement $(T_n = 2)$ est l'évènement : « Seuls deux numéros distincts sont sortis à l'issue des n tirages ».

Comme il y a $N \geq 2$ numéros possibles, on a $\binom{N}{2}$ possibilités de choisir deux numéros distincts.

Une fois ces deux numéros choisis, il faut choisir le nombre d'apparitions du plus petit (au moins 1 et au plus $n-1$), ainsi que les positions de ces apparitions. Ceci revient à choisir une partie de l'ensemble des n tirages (non vide et différente de l'ensemble entier) : il y en a $2^n - 2$. Alors :

$$P(T_n = 2) = \frac{1}{N^n}\binom{N}{2}(2^n - 2) = \frac{1}{N^n}\frac{N(N+1)}{2}(2^n - 2) = \frac{N+1}{N^{n-1}}(2^{n-1} - 1).$$

L'évènement $(T_n = n)$ est l'évènement : « Les n numéros tirés sont tous distincts deux à deux ».
Il est immédiat que si $n > N$, $P(T_n = n) = 0$.
Si $n \leq N$, il faut choisir, dans l'ordre, n numéros distincts parmi les N possibles : c'est un arrangement et on obtient :

$$P(T_n = n) = \frac{1}{N^n}\frac{N!}{(N-n)!}.$$

Finalement :

$$\boxed{P(T_n = 1) = \frac{N}{N^{n-1}} \qquad P(T_n = 2) = \frac{N+1}{N^{n-1}}(2^{n-1} - 1) \qquad P(T_n = n) = \begin{cases} \dfrac{1}{N^n}\dfrac{N!}{(N-n)!} & \text{quand } n \leq N \\ 0 & \text{quand } n > N \end{cases}}$$

2) Avec la loi des probabilités totales, on a :

$$P(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{N} P(T_n = i) P_{(T_n = i)}(T_{n+1} = k).$$

Or, si $i \neq k-1$ et $i \neq k$, on ne peut avoir $T_{n+1} = k$ quand $T_n = i$, donc $P_{(T_n = i)}(T_{n+1} = k) = 0$. Ainsi :

$$P(T_{n+1} = k) = P(T_n = k-1) P_{(T_n = k-1)}(T_{n+1} = k) + P(T_n = k) P_{(T_n = k)}(T_{n+1} = k).$$

Si $T_n = k-1$, $k-1$ numéros distincts sont sortis au cours des n premiers tirages, donc il en reste $N-(k-1)$ autres possibles et pour avoir $T_{n+1} = k$, il faut que le numéro choisi au $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage soit l'un de ces $N-(k-1)$ numéros restants : il a donc $N-(k-1)$ chances sur N d'en obtenir un, soit :

$$P_{(T_n = k-1)}(T_{n+1} = k) = \frac{N-(k-1)}{N}.$$

Si $T_n = k$, k numéros distincts sont sortis au cours des n premiers tirages, et pour avoir $T_{n+1} = k$, il faut que le numéro choisi au $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage soit l'un de ces k numéros : il a donc k chances sur N d'en obtenir un, soit :

$$P_{(T_n = k)}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}.$$

Ainsi :

$$\boxed{P(T_{n+1} = k) = \frac{N-(k-1)}{N} P(T_n = k-1) + \frac{k}{N} P(T_n = k)}$$

3) a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$
\begin{aligned}
NG_{n+1}(X) &= \sum_{k=1}^{n+1} NP(T_{n+1}=k)X^k = \sum_{k=1}^{n+1}\Big[\big(N-(k-1)\big)P(T_n=k-1)+kP(T_n=k)\Big]X^k \\
&= N\sum_{k=1}^{n+1}P(T_n=k-1)X^k - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)P(T_n=k-1)X^k + \sum_{k=1}^{n+1}kP(T_n=k)X^k \\
&= N\sum_{k=0}^{n}P(T_n=k)X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n}kP(T_n=k)X^{k+1} + \sum_{k=1}^{n+1}kP(T_n=k)X^k
\end{aligned}
$$

Remarquons qu'au moins un numéro sort, donc $P(T_n=0)=0$ et que, à l'issue de n tirages, on ne peut avoir obtenu $n+1$ numéros distincts, donc $P(T_n=n+1)=0$. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
NG_{n+1} &= N\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)X^{k+1} - \sum_{k=1}^{n}kP(T_n=k)X^{k+1} + \sum_{k=1}^{n}kP(T_n=k)X^k \\
&= (X-X^2)\sum_{k=1}^{n}kP(T_n=k)X^{k-1} + NX\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)X^k
\end{aligned}
$$

Soit avec $G_n=\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)X^k$, donc $G_n'=\sum_{k=1}^{n}kP(T_n=k)X^{k-1}$:

$$\boxed{NG_{n+1}=(X-X^2)G_n'+NXG_n}$$

b. Remarquons que $G_{T_n}(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(T_n=k)t^k$, mais si $k>\min(n,N)$, $P(T_n=k)=0$, donc :

$$G_{T_n}(t)=\sum_{k=1}^{\min(n,N)}P(T_n=k)t^k .$$

Et, si $n>N$, $\sum_{k=N+1}^{n}P(T_n=k)X^k=0$, donc $G_n(X)=\sum_{k=1}^{N}P(T_n=k)X^k$, et ainsi :

$$G_n(X)=\sum_{k=1}^{\min(n,N)}P(T_n=k)X^k$$

Finalement, on a :

$$G_{T_n}(t)=G_n(t).$$

Donc :

$$G_n(1)=G_{T_n}(1)=1 \quad\text{et}\quad G_n'(t)=G_{T_n}'(t)=E(T_n).$$

En dérivant la relation obtenue dans la question précédente, on obtient :

$$NG_{n+1}'=(1-2X)G_n'+(X-X^2)G_n''+NG_n+NXG_n'.$$

Et en évaluant en 1, on aboutit à :

$$NG_{n+1}'(1)=-G_n'(1)+NG_n(1)+NG_n'(1) \quad\Leftrightarrow\quad NE(T_{n+1})=-E(T_n)+N+NE(T_n).$$

Soit :

$$\boxed{E(T_{n+1})=\left(1-\frac{1}{N}\right)E(T_n)+1}$$

La suite $\big(E(T_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.

Comme $x=\left(1-\frac{1}{N}\right)x+1$ équivaut à $x=N$, on pose $u_n=E(T_n)-N$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\, n\in\mathbb{N}^*$ est alors géométrique de raison $1-\frac{1}{N}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}u_1$, soit :

$$E(T_n)=N+\left(E(T_1)-N\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}.$$

Or, T_1 est le nombre de numéros obtenus après 1 tirage, donc on a toujours $T_1=1$ ($T_1(\Omega)=\{1\}$ et $P(T_1=1)=1$), donc $E(T_1)=1$ et ainsi :

$$\boxed{E(T_n)=N+(1-N)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}}$$

c. Enfin, on a :

$$\frac{E(T_n)}{N}=1+\left(\frac{1}{N}-1\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}=1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}.$$

Comme $N\geq 2$, on a $0<1-\frac{1}{N}<1$, et donc :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}\frac{E(T_n)}{N}=1}$$

Exercice 5

1) Pour tout réel $\varepsilon>0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n donne :

$$P\left(\left|S_n-E(S_n)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

Or, comme les X_k sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p :

- $E(S_n)=E\left(\frac{X_1+...+X_n}{n}\right)=\frac{E(X_1)+...+E(X_n)}{n}=\frac{p+...+p}{n}=p$.
- $V(S_n)=V\left(\frac{X_1+...+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}V(X_1+...+X_n)=\frac{V(X_1)+...+V(X_n)}{n^2}=\frac{np(1-p)}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}$.

Ainsi, pour tout réel $\varepsilon>0$, $0\leq P\left(\left|S_n-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ et d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|S_n-p\right|\geq\varepsilon\right)=0}$$

2) On a $X_{n+1}(\Omega)=X_n(\Omega)=\{0,1\}$, donc $Y_n(\Omega)=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ et, toujours avec la mutuelle indépendance des X_k, et la loi de Bernoulli de paramètre p :

$$P(Y_n=0)=P(X_n=0,X_{n+1}=0)=P(X_n=0)P(X_{n+1}=0)=(1-p)^2$$

$$P\left(Y_n=\frac{1}{2}\right)=P(X_n=0,X_{n+1}=1)+P(X_n=1,X_{n+1}=0)$$
$$=P(X_n=0)P(X_{n+1}=1)+P(X_n=1)P(X_{n+1}=0)=2p(1-p)$$

$$P(Y_n=1)=P(X_n=1,X_{n+1}=1)=P(X_n=1)P(X_{n+1}=1)=p^2$$

D'où la loi :

Y_n	0	½	1
probabilité	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

On a alors :

$$E(Y_n)=0\times P(Y_n=0)+\frac{1}{2}\times P\left(Y_n=\frac{1}{2}\right)+1\times P(Y_n=1)=p(1-p)+p^2 .$$

Soit :

$$\boxed{E(Y_n)=p}$$

Remarquons que l'on aurait pu écrire $E(Y_n)=E\left(\frac{X_{n+1}+X_n}{2}\right)=\frac{E(X_{n+1})+E(X_n)}{2}=\frac{p+p}{2}=p$.

3) Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$ tels que $m<n$ et $a,b\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$. On a :

$$P(Y_m=a,Y_n=b)=P(X_m+X_{m+1}=2a,X_n+X_{n+1}=2b)$$
$$=\sum_{i,j\in\{0,1\}}P(X_m=i,X_{m+1}=2a-i,X_n=j,X_{n+1}=2b-j)$$

Si $m+1<n$, alors X_m, X_{m+1}, X_n et X_{n+1} sont indépendantes, donc :

$$P(Y_m=a,Y_n=b)=\sum_{i,j\in\{0,1\}}P(X_m=i)P(X_{m+1}=2a-i)P(X_n=j)P(X_{n+1}=2b-j)$$
$$=\sum_{i,j\in\{0,1\}}P(X_m=i,X_{m+1}=2a-i)P(X_n=j,X_{n+1}=2b-j)$$
$$=P(X_m+X_{m+1}=2a)P(X_n+X_{n+1}=2b)=P(Y_m=a)P(Y_n=b)$$

Donc Y_m et Y_n sont indépendantes.

Par contre, si $m+1=n$, on a par exemple :

$$P(Y_m=0,Y_{m+1}=0)=P(X_m=0,X_{m+1}=0,X_{m+2}=0)=(1-p)^3\neq(1-p)^4=P(Y_m=0)P(Y_{m+1}=0) .$$

Donc Y_m et Y_{m+1} ne sont pas indépendantes.

Finalement :

$$\boxed{Y_m \text{ et } Y_n \text{ sont indépendantes si et seulement si } m+1<n .}$$

4) Reprenons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à T_n. Pour tout entier $n\geq 3$ et tout réel $\varepsilon>0$:

$$P\left(\left|S_n-E(T_n)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} .$$

On a $E(T_n) = \dfrac{E(Y_1)+...+E(Y_n)}{n} = p$ et :

$$\begin{aligned} V(T_n) &= E(T_n^{\,2}) - E(T_n)^2 = \frac{1}{n^2}E\left((Y_1+...+Y_n)^2\right) - p^2 \\ &= \frac{1}{n^2}E\left(Y_1^{\,2}+...+Y_n^{\,2}+2\sum_{1\le i<j\le n} Y_iY_j\right) - p^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\left(E(Y_1^{\,2})+...+E(Y_n^{\,2})+2\sum_{i=1}^{n-1}E(Y_iY_{i+1})+2\sum_{1\le i<j-1\le n-1}E(Y_iY_j)\right) - p^2 \end{aligned}$$

Les Y_i suivent toutes la même loi, donc les $Y_i^{\,2}$ et $E(Y_1^{\,2}) = ... = E(Y_n^{\,2})$.

Les Y_iY_{i+1} suivent toutes la même loi, donc les $Y_i^{\,2}$ et $E(Y_1Y_2) = ... = E(Y_{n-1}Y_n)$.

Dans la dernière somme, Y_i et Y_j sont indépendantes, donc $E(Y_iY_j) = E(Y_i)E(Y_j) = p^2$ et :

$$\sum_{1\le i<j-1\le n-1} E(Y_iY_j) = \sum_{1\le i<j-1\le n-1} p^2 = \sum_{j=3}^{n}\sum_{i=1}^{j-2} p^2 = \left(\sum_{j=3}^{n}(j-2)\right)p^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-2}k\right)p^2 = \frac{(n-2)(n-1)}{2}p^2 = \frac{n^2-3n+2}{2}p^2 .$$

Ainsi :

$$V(T_n) = \frac{1}{n^2}\left(nE(Y_1^{\,2})+2(n-1)E(Y_1Y_2)+2\frac{n^2-3n+2}{2}p^2\right) - p^2 = \frac{E(Y_1^{\,2})+2E(Y_1Y_2)-3p^2}{n} - 2\frac{p^2-E(Y_1Y_2)}{n^2} .$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$ et comme $0 \le P\left(\left|S_n - E(T_n)\right| \ge \varepsilon\right) \le \dfrac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$, on a bien, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|T_n - p\right| \ge \varepsilon\right) = 0}$$

Exercice 6

1) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \le P(X > n) \le 1$ donc $0 \le \left|P(X>n)t^n\right| \le |t|^n$.

Or, si $|t| < 1$, la série géométrique $\sum |t|^n$ converge, donc $\sum \left|P(X>n)t^n\right|$ converge.

Ainsi, pour tout $t \in \,]-1,1[$, la série $\sum P(X>n)t^n$ est absolument convergente donc convergente et ainsi :

$$\boxed{\text{La série entière } \sum P(X>n)t^n \text{ a un rayon de convergence au moins égal à 1.}}$$

2) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $t \in \,]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} P(X>n)t^n &= \sum_{n=0}^{N}\left[1-P(X\le n)\right]t^n = \sum_{n=0}^{N}t^n - \sum_{n=0}^{N}P(X\le n)t^n = \sum_{n=0}^{N}t^n - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n}P(X=k)\right)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{N}t^n - \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N}P(X=k)t^n = \sum_{n=0}^{N}t^n - \sum_{k=0}^{N}\left(P(X=k)\sum_{n=k}^{N}t^n\right) = \sum_{n=0}^{N}t^n - \sum_{k=0}^{N}\left(P(X=k)t^k\frac{1-t^{N-k+1}}{1-t}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{N} P(X>n)t^n = \sum_{n=0}^{N}t^n - \frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{N}P(X=k)t^k + \frac{t^{N+1}}{1-t}\sum_{k=0}^{N}P(X=k) .$$

Avec $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)=1$, on a $\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{t^{N+1}}{1-t}\sum_{k=0}^{N} P(X=k)\right)=0$ et, quand $N\to+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n)t^n=\sum_{n=0}^{+\infty} t^n-\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k .$$

Soit :

$$\boxed{H(t)=\frac{1-G_X(t)}{1-t}}$$

3) Si X admet une espérance finie, alors G_X est dérivable à gauche en 1 et $E(X)=G_X'(1)$.

On admet que si G_X est dérivable à gauche en 1, alors X admet une espérance finie et $E(X)=G_X'(1)$.

Ainsi, X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et, dans ce cas :

$$E(X)=G_X'(1).$$

Or, on a pour tout $t\in\,]-1,1[$, $H(t)=\frac{G_X(t)-1}{t-1}$, donc G_X est dérivable à gauche en 1 si et seulement si H admet une limite à gauche en 1 et dans ce cas, $\lim_{t\to1^-} H(t)=G_X'(1)$.

Ainsi :

X admet une espérance finie si et seulement si H admet une limite à gauche en 1 et dans ce cas, $E(X)=\lim_{t\to1^-} H(t)$.

Exercice 7

1) Quand $N=j$ avec $j\in\mathbb{N}$, la réaction a produit j électrons. Chaque électron a une probabilité p d'être efficace (donc $1-p$ de ne pas l'être), indépendamment des autres. On est en présence d'un schéma de Bernoulli e :

Le nombre X d'électrons efficaces suit une loi binomiale de paramètres j et p.

2) Pour tout $(j,k)\in\mathbb{N}^2$, on a $P(N=j,X=k)=0$ quand $k>j$ et quand $k\le j$:

$$P(N=j,X=k)=P(N=j)P_{(N=j)}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{k}p^k(1-p)^{j-k}.$$

Soit, pour tout $(j,k)\in\mathbb{N}^2$:

$$\boxed{P(N=j,X=k)=\begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^j p^k(1-p)^{j-k}}{k!(j-k)!} & \text{quand } k\le j\\ 0 & \text{quand } k>j\end{cases}}$$

3) D'après la formule des probabilités totales, on a alors pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$P(X=k)=\sum_{j=0}^{+\infty}P(N=j,X=k)=\sum_{j=k}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^j p^k(1-p)^{j-k}}{k!(j-k)!}=e^{-\lambda}\frac{p^k\lambda^k}{k!}\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{j-k}(1-p)^{j-k}}{(j-k)!}$$
$$=e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\left(\lambda(1-p)\right)^i}{i!}=e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)}=e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}$$

Ainsi :

$$\boxed{X \text{ suit une loi de Poison de paramètre } p\lambda.}$$

On a immédiatement :

$$\boxed{E(X)=V(X)=p\lambda}$$

Remarquons que l'on montre comme pour X que Y suit une loi de Poison de paramètre $(1-p)\lambda$.

4) Soit $(k,k')\in\mathbb{N}^2$. On a $X+Y=N$, donc :

$$P(X=k,Y=k')=P(N=k+k',X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+k'}p^k(1-p)^{k'}}{k!k'!}.$$

Et :

$$P(X=k)P(Y=k')=e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-(1-p)\lambda}\frac{\left((1-p)\lambda\right)^{k'}}{k'!}=e^{-p\lambda-(1-p)\lambda}\frac{\lambda^k p^k\lambda^{k'}(1-p)^{k'}}{k!k'!}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+k'}p^k(1-p)^{k'}}{k!k'!}.$$

Donc, pour tout $(k,k')\in\mathbb{N}^2$, $P(X=k,Y=k')=P(X=k)P(Y=k')$, ce qui prouve que :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$$

5) On a :

$$\operatorname{cov}(X,N)=\operatorname{cov}(X,X+Y)=\operatorname{cov}(X,X)+\operatorname{cov}(X,Y)=V(X)+\operatorname{cov}(X,Y).$$

Et comme X et Y sont indépendantes, $\operatorname{cov}(X,Y)=0$. Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,N)=V(X)>0}$$

Exercice 8

1) Les colonnes de M sont $X_1U,\dots,X_nU$, donc toutes proportionnelles à U. Alors, le rang de M vaut au plus 1. Ainsi, les valeurs possibles de $rg(M)$ sont 0 et 1. De plus :

$$rg(M)=0 \iff U=0 \iff X_1=\dots=X_n=0.$$

Donc, comme les X_i sont des variables de Bernoulli de même paramètre p et mutuellement indépendantes :

$$P\left(rg(M)=0\right)=P\left(X_1=0,\dots,X_n=0\right)=P(X_1=0)\dots P(X_n=0)=(1-p)^n.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La variable } rg(M) \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 1-(1-p)^n.}$$

Les coefficients diagonaux de M sont les X_i^2, donc $Tr(M)=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

Or, comme pour tout $i\in [\![1,n]\!]$, $X_i=0$ ou 1, on a $X_i^2=X_i$ et ainsi, $Tr(M)=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Enfin, la variable $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et p, donc :

$$\boxed{\text{La variable } Tr(M) \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p.}$$

2) Si M est une matrice de projection, alors $rg(M)=Tr(M)$. Comme $rg(M)=0$ ou 1, on obtient :

$$Tr(M)=\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \text{ ou } 1 \quad \Leftrightarrow \quad M=0_n \text{ ou } E_{i,i}$$

où $E_{i,i}$ est la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui au croisement de la colonne i et de la ligne i qui vaut 1.

Réciproquement, si $M=0_n$ ou $E_{i,i}$, alors on a immédiatement $M^2=M$, donc M est une matrice de projection.

Ainsi, M est une matrice de projection si et seulement si $Tr(M)\le 1$ et comme $Tr(M)$ suit une loi binomiale de paramètres n et p, la probabilité d'un tel évènement est :

$$P\big(Tr(M)\le 1\big)=P\big(Tr(M)=0\big)+P\big(Tr(M)=1\big)=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{La probabilité que } M \text{ soit une matrice de projection est } \big(1+(n-1)p\big)(1-p)^{n-1}.}$$

3) On a ici $U=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc ${}^tUV=X_1+X_2$ (en identifiant $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$). Alors :

$$S={}^tVMV={}^tVU\,{}^tUV={}^t({}^tUV)\,{}^tUV=(X_1+X_2)^2=X_1^2+X_2^2+2X_1X_2=X_1+X_2+2X_1X_2$$

car $X_i=0$ ou 1, donc $X_i^2=X_i$.

On a alors :

$$E(S)=E(X_1)+E(X_2)+2E(X_1X_2)=E(X_1)+E(X_2)+2E(X_1)E(X_2)=2p+2p^2.$$

Et :

$$\begin{aligned} E(S^2)&=E\big((X_1+X_2+2X_1X_2)^2\big)=E\big(X_1^2+X_2^2+4X_1^2X_2^2+2X_1X_2+4X_1^2X_2+4X_1X_2^2\big)\\ &=E\big(X_1+X_2+4X_1X_2+2X_1X_2+4X_1X_2+4X_1X_2\big)=E\big(X_1+X_2+14X_1X_2\big)\\ &=E(X_1)+E(X_2)+14E(X_1X_2)=E(X_1)+E(X_2)+14E(X_1)E(X_2)=2p+14p^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$V(S)=E(S^2)-E(S)^2=2p+14p^2-4p^2(1+p)^2.$$

Finalement (après factorisation), on obtient :

$$\boxed{E(S)=2p(1+p) \quad \text{et} \quad V(S)=2p(1-p)(1+6p+2p^2).}$$

Exercice 9

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, notons X_k la variable aléatoire qui vaut 1 quand le jeton numéroté *k* appartient à la poignée piochée et 0 sinon. On a alors :

$$S=\sum_{k=1}^{n} kX_k\ .$$

Une poignée correspond à une partie de $[\![1,n]\!]$, donc il y en a 2^n (y compris la poignée vide), dont 2^{n-1} contenant le jeton numéroté *k* (pour construire une partie de $[\![1,n]\!]$ contenant *k*, il suffit de choisir une partie de $[\![1,n]\!]\backslash\{k\}$ et d'y ajouter *k*). Comme les poignées sont équiprobables, la probabilité d'avoir *k* dans la poignée piochée est $P(X_k=1)=\dfrac{2^{n-1}}{2^n}=\dfrac{1}{2}$, et ceci quel que soit *k*. Alors, quel que soit $k\in[\![1,n]\!]$:

$$E(X_k)=P(X_k=1)=\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}.$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$E(S)=E\left(\sum_{k=1}^{n} kX_k\right)=\sum_{k=1}^{n} kE(X_k)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\ .$$

Soit :

$$\boxed{E(S)=\frac{n(n+1)}{4}}$$

Exercice 10

1) On a $U=\begin{cases}0 & \text{si } X=0\\ Y & \text{si } X=1\end{cases}$ et $\Omega(Y)=\mathbb{N}^*$, donc $\Omega(U)=\mathbb{N}$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $(U=k)=(X=1)\cap(Y=k)$ et comme *X* et *Y* sont indépendantes :

$$P(U=k)=P(X=1)\times P(Y=k)=pP(Y=k)\ .$$

Donc :

$$E(U)=\sum_{k=0}^{+\infty} kP(U=k)=\sum_{k=1}^{+\infty} k\,pP(Y=k)=pE(Y)=\frac{p}{a}$$

$$E(U^2)=\sum_{k=0}^{+\infty} k^2P(U=k)=\sum_{k=1}^{+\infty} k^2pP(Y=k)=pE(Y^2)=p\frac{2-a}{a^2}$$

$$V(U)=E(U^2)-E(U)^2=p\frac{2-a}{a^2}-\frac{p^2}{a^2}$$

Ainsi :

$$\boxed{E(U)=\frac{p}{a}\qquad V(U)=\frac{p(2-a-p)}{a^2}}$$

2) On a $V=\begin{cases}Y & \text{si } X=0\\ Z & \text{si } X=1\end{cases}$, $\Omega(Y)=\mathbb{N}^*$ et $\Omega(Z)=\mathbb{N}$, donc $\Omega(V)=\mathbb{N}$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $(U=k)=\left[(X=0)\cap(Y=k)\right]\cup\left[(X=1)\cap(Z=k)\right]$.

Comme l'union est disjointe :

$$P(U=k)=P\big[(X=0)\cap(Y=k)\big]+P\big[(X=1)\cap(Z=k)\big].$$

Comme X, Y et Z sont deux à deux indépendantes :

$$P(U=k)=P(X=0)\times P(Y=k)+P(X=1)\times P(Z=k)=(1-p)P(Y=k)+p\,P(Z=k)\,.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
E(V)&=\sum_{k=0}^{+\infty}k\,P(V=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\big[(1-p)P(Y=k)+p\,P(Z=k)\big]\\
&=(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}k\,P(Y=k)+p\sum_{k=1}^{+\infty}k\,P(Z=k)=(1-p)E(Y)+p\,E(Z)=(1-p)\frac{1}{a}+p\lambda\\
E(V^2)&=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2P(V=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\big[(1-p)P(Y=k)+p\,P(Z=k)\big]\\
&=(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P(Y=k)+p\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P(Z=k)=(1-p)E(Y^2)+p\,E(Z^2)=(1-p)\frac{2-a}{a^2}+p(\lambda+\lambda^2)\\
V(V)&=E(V^2)-E(V)^2=(1-p)\frac{2-a}{a^2}+p(\lambda+\lambda^2)-\left((1-p)\frac{1}{a}+p\lambda\right)^2
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{E(V)=\frac{1-p}{a}+p\lambda\qquad V(V)=\frac{(1-p)(1-a+p)}{a^2}+\left(1+\lambda-p\lambda-\frac{2(1-p)}{a}\right)p\lambda}$$