Entrainement n° 1

Intégration

Exercice 56 (CCP 2016 - Séries, Intégrales).

1. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer l'existence de $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$.
3. Montrer que $J = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$.

Exercice 74 (CCP 2017 - Intégrales et Séries).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)$ si $t \in]0, n]$ et sinon $f_n(t) = 0$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f à préciser.
2. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} \, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n f_n(t) \, dt$$
3. Sachant que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, montrer que $\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} \, dt = -\gamma$.

Exercice 57 (CCP 2016 - Intégrales).

1. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.
2. Trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\frac{t}{n})}{t(1+t^2)} dt$.

   Fournir un second terme.

Exercice 60 (CCP 2016 - Intégrales à paramètre).

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer F'.
3. Expliciter F sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 64 (CCP 2016 - Intégrales et séries).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}\,dt$ quand elle existe.

1. Préciser l'ensemble de définition de f et déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. $\forall x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.
3. Exprimer $f(x)$ comme somme d'une série.
4. Comment retrouver le résultat ?

Exercice 67 (CCP 2017 - Séries et intégrales).

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln(f(u))\,\mathrm{d}u$.

   Étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{v_n}$.

   (*Indication fournie : Utiliser* $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(u))\,\mathrm{d}u$)

Exercice 90 (Mines-Telecom 2016 - Intégrales à paramètre).

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégral.
2. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos xt\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. (a) Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 que l'on notera (E).
   (b) Résoudre (E).

Exercice 103 (Mines-Ponts 2016 - Intégrales, séries).

On pose, $\forall x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln t \ln(1 - t^x)\,\mathrm{d}t$.

1. Définition de f ?
2. Écrire f comme la somme d'une série de fonctions.
3. Déterminer la limite de f en 0.