Entrainement n° 2

Réduction

Exercice 4 (CCP 2016 - Réduction d'endomorphismes).
Soit A de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$, inversible, telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\mathrm{tr}A = 8$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Que peut-on dire des valeurs propres de A à partir des propriétés suivantes :
   (a) $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$,
   (b) A est inversible,
   (c) $\mathrm{tr}A = 8$?
3. Donner une matrice D diagonale, semblable à A.
4. Donner tous les polynômes annulateurs de A.

Exercice 5 (CCP 2016 - Réduction d'endomorphisme).
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Quels sont les éléments propres de f ?
3. f est-elle diagonalisable ? inversible ?

Exercice 9 (CCP 2016 - Réduction d'endomorphismes).
Soit A appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = {}^tA$ et $A \neq 0$.

1. Trouver un polynôme annulateur de A.
2. On suppose que $0 \in \mathrm{Sp}A$. Déterminer $\mathrm{Sp}A$.
3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (CCP 2017 - Réduction d'endomorphisme).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et l'endomorphisme $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(AM)I_n \end{array} \right.$.

1. Déterminer Φ^2 en fonction de Φ.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit diagonalisable. Donner les sous-espaces propres.

Exercice 12 (CCP 2017 - Réduction d'endomorphisme).
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$.
Soit $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha + \beta = \gamma$, $\gamma \neq \beta$ et $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.

1. Calculer χ_B en fonction de χ_A.
2. Montrer que si $X \in \mathrm{Ker} A$ alors $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} B$.
   En déduire que $\dim \ker B \leqslant 2 \dim \mathrm{Ker} A$.
3. Diagonaliser B pour $\alpha = -1$, $\beta = 3$ et $\gamma = 2$.

Exercice 15 (CCP 2017 - Réduction d'endomorphisme).
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det A \neq 0$.
Soit f une application telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = 2\mathrm{tr}(M)A$.

1. f est-il un endomorphisme ?
2. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 16 (CCP 2017 - Réduction d'endomorphisme).
Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M commute avec D et et seulement si M est diagonale.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice diagonale. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus $n-1$ tel que $M = P(D)$.

Exercice 18 (CCP 2017 - Réduction d'endomorphisme).

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? A est-elle inversible ? Donner les éléments propres de A.
2. On définit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. B est-elle diagonalisable ? Donner les éléments propres de B.

Exercice 34 (Ecole Navale 2017 - Réduction).

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $f : M \mapsto {}^tM$ endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Donner les éléments propres de f.
   (b) f est-elle diagonalisable ?
   (c) Donner le polynôme caractéristique de f.

Exercice 26 (TPE-EIVP 2017 - Réduction)

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = A + B$, $C^2 = 2A + 3B$, $C^3 = 5A + 6B$.
A et B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 42 (Mines-Telecom 2017 - Réduction d'endomorphismes)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & a \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Donner le rang de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Donner les éléments propres de A.

Exercice 44 (Mines-Ponts 2016 - Réduction d'endomorphismes).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes.
   (a) Déterminer la dimension du commutant de A.
   (b) Base associée à A ?
2. On suppose A diagonalisable. Mêmes questions.

Exercice 50 (Mines-Ponts 2016 - Réduction d'endomorphismes).

Soit $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (X^2+X)P(1)+(X^2-X)P(-1) \end{array} \right.$.

1. Déterminer des bases de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Trouver les éléments propres de f.
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 52 (Centrale 2016 - Algèbre linéaire).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$.

1. Déterminer $\operatorname{rg} f_A$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f_A soit diagonalisable.
3. Calculer $\operatorname{tr} f_A$.
4. Calculer χ_{f_A}.