Entrainement n° 3

Probabilités

Exercice 114

Soit X,Y des variables aléatoires vérifiant les hypothèses suivantes :
(i) X et Y admettent chacune une espérance,
(ii) X et $X - Y$ sont indépendantes,
(iii) Y et $X - Y$ sont indépendantes.
Montrer que $X - Y$ est presque constante.

Exercice 115

Soit X et Y deux variables aléatoires. X suit un loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y sachant $X = n$ suit une loi binomiale de paramètre n et $p \in [0, 1]$.

1. Donner la loi de (X, Y).
2. Reconnaître la loi de Y.
3. Soit $Z = X - Y$. Donner la loi de Z.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 116

Un joueur dans un casino joue sur une machine qui renvoie un entier N dans $\mathbb{N}^*$ selon la probabilité $P(N = n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Si n est pair le joueur gagne n jetons et si n est impair, le joueur perd n jetons.

1. Calculez la probabilité de gagner à ce jeu.
2. Soit G le gain algébrique du joueur ($G < 0$ si le joueur perd), donnez G et calculez son espérance.

Exercice 117

Soit p_k définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par $p_k = k(1-p)^{k-1}p^2$.

1. Montrer que (p_k) défini une loi de probabilités.
2. Soit X la variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(X = k) = p_k$.
   Montrer que l'espérance de $X - 1$ et $(X-1)(X-2)$ existe et calculer leur valeur.
3. Calculer l'espérance de X et sa variance.

Exercice 118

Soit $n \geqslant 3$, n personnes lancent simultanément une pièce équilibrée. Si toutes les pièces sauf une donnent le même résultat, le possesseur de la pièce perd. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de tours nécessaires pour avoir un perdant.

1. Donner la probabilité p_n qu'il y ait un perdant au premier tour.
2. Donner la loi, l'espérance et la variance de X.
3. Lorsqu'un joueur perd, il est exclu de la partie. La partie s'arrête lorsqu'il reste deux personnes, qui sont gagnantes. Donner le temps moyen d'une partie (unité de temps : 1 tour).

Exercice 119

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé.
Montrer que pour toute suite $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ d'évènements on a :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leqslant P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) + (n-1)$$

Exercice 120

Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
2. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{Z=n}(X = h)$.
3. Déterminer la loi de X sachant $Z = n$.

Exercice 121

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^r}$.
2. Soit $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_n = \binom{k+r-1}{k} q^r p^k$ avec $q = 1 - p$.
   Montrer que p_k est une loi de probabilité.
3. Calculer la série génératrice de la variable aléatoire X définie par :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = p_k.$$
4. Calculer la variance et l'espérance de X.

Exercice 122

Soit X une variable aléatoire dont la fonction génératrice est $G_X(t) = ae^{1+t^2}$.

1. Déterminer a.
2. Quelle est la loi de X ? Son espérance, sa variance ?

Exercice 123

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{4})$, et $n \geqslant 5$. A partir des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un encadrement vérifié par $P(X \geqslant n)$.

Exercice 124

Une puce se déplace dans 3 cases (C_1, C_2, C_3). Elle est dans C_1 à l'instant $t = 0$.

— Lorsqu'il est dans C_1 à l'instant $t = n$, il peut se trouver dans C_1, C_2 ou C_3 à l'instant $t = n + 1$ avec la même probabilité.

— Lorsqu'il est dans C_2 à l'instant $t = n$, il peut se trouver dans C_1, C_2 ou C_3 à l'instant $t = n + 1$ avec la même probabilité.

— Lorsqu'il est dans C_3 à l'instant $t = n$, il y reste à l'instant $t = n + 1$.

Notons $u_n = p(E_n)$, $v_n = p(F_n)$ et $w_n = p(G_n)$ et $X = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ avec :

— E_n : « La puce est dans la case C_1 à l'instant n »

— F_n : « La puce est dans la case C_2 à l'instant n »

— G_n : « La puce est dans la case C_3 à l'instant n »

1. Déterminer le lien entre u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1} et u_n, v_n, w_n.
2. Déterminer X_{n+1} sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ avec A une matrice à déterminer.
3. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
4. Déterminer l'expression matricielle de X_n.
5. Énoncer le théorème de continuité monotone.
6. Calculer $p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n\right)$. Commenter.