# *Corrigé du DM n° 9*

*Dans tout le problème, $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont identifiés.*

## Partie II - Un exemple par deux méthodes

**Q7.** On a $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$, donc :

$$\chi_A=\begin{vmatrix}X-3&1&-1\\-2&X&-1\\-1&1&X-2\end{vmatrix}\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{=}\begin{vmatrix}X-1&1-X&0\\-2&X&-1\\-1&1&X-2\end{vmatrix}\underset{C_2\leftarrow C_2+C_1}{=}\begin{vmatrix}X-1&0&0\\-2&X-2&-1\\-1&0&X-2\end{vmatrix}=(X-1)(X-2)^2.$$

On a $Sp(A)=\{1;2\}$ et en résolvant $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on trouve :

$$\ker\left(A-I_3\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)\text{ et }\ker\left(A-2I_3\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

On a alors $\dim\ker\left(A-I_3\right)+\dim\ker\left(A-2I_3\right)=2\neq 3$, donc :

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

On a $\left(A-2I_3\right)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$ et en résolvant $\left(A-2I_3\right)^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, on trouve :

$$\ker\left(A-2I_3\right)^2=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

De plus :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\mathbb{R}^3.$$

Donc, la famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ et comme elle contient $3=\dim\mathbb{R}^3$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Ceci prouve que :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)\oplus\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\ker\left(A-I_3\right)\oplus\ker\left(A-2I_3\right)^2=\mathbb{R}^3.$$

Soit :

$$\boxed{\ker\left(u-id\right)\oplus\ker\left(u-2id\right)^2=\mathbb{R}^3}$$

**Q8.** Si on pose $e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, on a d'après ce qui précède :

$$\ker(u-id)=\text{Vect}\{e_1\}$$
$$\ker(u-2id)=\text{Vect}\{e_2\}$$
$$\ker(u-2id)^2=\text{Vect}\{e_2,e_3\}$$

Et on a vu que $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donc :

$$\boxed{\text{Les vecteurs } e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ conviennent.}}$$

On a $e_1\in\ker(u-id)$ et $e_2\in\ker(u-2id)$, donc $u(e_1)=e_1$ et $u(e_2)=2e_2$. De plus :

$$u(e_3)=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=e_2+2e_3.$$

Donc :

$$\boxed{B=M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}}$$

**Q9.** Si on pose $D_0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et $N_0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, on a $B=D_0+N_0$ où $D_0$ est diagonale (donc diagonalisable) et $N_0^2=0_3$, donc $N_0$ est nilpotente.

De plus, $D_0N_0=N_0D_0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, donc $D_0$ et $N_0$ commutent, et par unicité :

$$\boxed{\text{La décomposition de Dunford de } B \text{ est } B=D_0+N_0 \text{ avec } D_0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} \text{ et } N_0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.}$$

Si $P$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$, on a $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ et $B=P^{-1}AP$. On a alors :

$$A=PBP^{-1}=P(D_0+N_0)P^{-1}=PD_0P^{-1}+PN_0P^{-1}=D+N$$

avec $D=PD_0P^{-1}$ et $N=PN_0P^{-1}$.

On a $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$, donc :

$$D=PD_0P^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix} \text{ et } N=PN_0P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Comme $D_0$ est diagonale, $D$ est diagonalisable et $N^2=PN_0^2P^{-1}=0_3$, donc $N$ est nilpotente.

Enfin :

$$DN=PD_0P^{-1}PN_0P^{-1}=PD_0N_0P^{-1}=PN_0D_0P^{-1}=PN_0P^{-1}PD_0P^{-1}=ND.$$

Donc, $N$ et $D$ commutent et par unicité :

$$\boxed{\text{La décomposition de Dunford de } A \text{ est } A=D+N \quad \text{avec } D=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix} \text{ et } N=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.}$$

**Q10.** On a :

$$\boxed{\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X-2}+\frac{1}{(X-2)^2}}$$

On a $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\dfrac{1}{X-1}-\dfrac{1}{X-2}+\dfrac{1}{(X-2)^2}=\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{-X+3}{(X-2)^2}$, donc :

$$(X-1)(X-2)^2\left(\frac{1}{X-1}+\frac{-X+3}{(X-2)^2}\right)=1 \quad\Leftrightarrow\quad (X-2)^2+(X-1)(-X+3)=1$$

Ainsi :

$$\boxed{(X-1)U(X)+(X-2)^2V(X)=1 \quad \text{avec } \begin{cases}V(X)=1 \ \ (\text{et } \deg V=0<1)\\ U(X)=-X+3 \ \ (\text{et } \deg U=1<2)\end{cases}}$$

**Q11.** On a $1=U(X)(X-1)+V(X)(X-2)^2$, donc $id=U(u)\circ(u-id)+V(u)\circ(u-2id)^2=q+p$ et ainsi, on a bien pour tout $x\in\mathbb{R}^3$ :

$$\boxed{x=q(x)+p(x)}$$

Comme $V=1$, on a $p=(u-2id)^2$ et $q\circ p=U(u)\circ(u-id)\circ(u-2id)^2=U(u)\circ\chi_u(u)$.

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_u(u)=0$, donc :

$$q\circ p=0.$$

Alors, $id=q+p$ donne alors :

$$p=q\circ p+p^2=p^2.$$

Donc, $p$ est un projecteur (sur $\operatorname{Im} p$, parallèlement à $\ker p$). Comme $q+p=id$, $q=id-p$ est le projecteur associé à $p$ (projecteur sur $\operatorname{Im} q=\ker p$, parallèlement à $\ker q=\operatorname{Im} p$).

Enfin, $\ker p = \ker(u-2id)^2$ et $\ker q = \ker\left[U(u)\circ(u-id)\right]$. Or $U(u) = -(u-3id)$ est bijectif (car 3 n'est pas valeur propre de *u*), donc $\ker q = \ker(u-id)$ et finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} p \text{ est le projecteur sur } \ker(u-id)\text{, parallèlement à } \ker(u-2id)^2 \ ; \\ q \text{ est le projecteur sur } \ker(u-2id)^2\text{, parallèlement à } \ker(u-id). \end{array}}$$

**Q12.** On pose $d = p+2q = p+q+q = id+q$, donc :

$$M_{\mathcal{B}}(d) = M_{\mathcal{B}}(id+q) = M_{\mathcal{B}}(id) + M_{\mathcal{B}}(q) = I_3 + M_{\mathcal{B}}(q).$$

Or, $q$ est le projecteur sur $\ker\left(u-2id\right)^2 = \mathrm{Vect}\left\{e_2, e_3\right\}$, parallèlement à $\ker\left(u-id\right) = \mathrm{Vect}\left\{e_1\right\}$ et $\mathcal{B} = \left(e_1, e_2, e_3\right)$, donc $M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et ainsi :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

On a donc $M_{\mathcal{B}}(d) = D_0$ où $D_0$ est la matrice définie dans la question **Q9**. Alors :

$$D = PD_0P^{-1} = M_{\mathcal{B}_c}(d).$$

Or, $q = U(u)\circ(u-id) = (3id-u)\circ(u-id)$ donc $d = q+id = P(u)$ avec $P = (3-X)(X-1)+1 = -X^2+4X-2$.

Alors, $D = M_{\mathcal{B}_c}\left(P(u)\right) = P\left(M_{\mathcal{B}_c}(u)\right) = P(A)$, soit avec $N = A-D$ :

$$\boxed{\begin{array}{l} D = -A^2+4A-2I_3 \\ N = A^2-3A+2I_3 \end{array}}$$

## Partie III – Une preuve de l'unicité de la décomposition

**Q13.** Voir le cours pour la première partie de la question et voir le corrigé de l'exercice 8 du TD n° 8 pour la diagonalisation simultanée.

**Q14.** On suppose que *A* et *B* sont diagonalisables et commutent. Alors, d'après la question précédente, *A* et *B* sont simultanément diagonalisables, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales. Dans ce cas, la matrice $P^{-1}AP - P^{-1}BP = P^{-1}(A-B)P$ est diagonale (différence de deux matrices diagonales) et donc $A-B$ est semblable à une matrice diagonale, autrement dit :

$$\boxed{A-B \text{ est diagonalisable.}}$$

**Q15.** On suppose que *A* et *B* sont nilpotentes et commutent. Alors, il existe deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $A^p = B^q = 0_n$ et comme *A* et *B* commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$(A-B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} (-1)^{p+q-k} A^k B^{p+q-k}.$$

Or, si $p \leq k \leq p+q$, alors $A^k = 0_n$ et si $0 \leq k \leq p$ alors $p+q-k \geq q$ et $B^{p+q-k} = 0_n$. Ainsi, tous les termes de la somme précédente sont nuls et donc, $(A-B)^{p+q} = 0_n$. Ceci prouve que :

$$\boxed{A-B \text{ est nilpotente.}}$$

**Q16.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et nilpotente.

Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP = diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_n$. On a alors :

$$diag\left(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p\right) = \left(P^{-1}MP\right)^p = P^{-1}M^pP = 0_n.$$

Donc, $\lambda_k^p = 0$, soit $\lambda_k = 0$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et donc $P^{-1}MP = 0_n$, soit $M = P0_nP^{-1} = 0_n$.

Comme la matrice nulle est diagonalisable (car diagonale) et nilpotente (d'indice 1), on peut conclure que :

$$\boxed{\text{La seule matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonalisable et nilpotente est la matrice nulle.}}$$

**Q17.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé telle qu'il existe un couple $(D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que *D* et *N* soient des polynômes en *A*.

Soit alors un autre couple $(D', N') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, vérifiant les conditions (1), (2), (3) et (4).

On a donc $A = D + N = D' + N'$ et $D'N' = N'D'$, donc :

$$D'A = D'(D' + N') = D'^2 + D'N' = D'^2 + N'D' = (D' + N')D' = AD'.$$

Ainsi, $D'$ commute avec *A*, donc avec tout polynôme en *A*, y compris *D*.

On prouve de la même façon que $N'$ commute avec *N*.

Or $D + N = D' + N'$ se récrit $N - N' = D' - D$ et, en notant *B* cette matrice :

- comme *D* et $D'$ commutent et sont diagonalisables, $B = D' - D$ est diagonalisable, d'après **Q14** ;
- comme *N* et $N'$ commutent et sont nilpotentes, $B = N' - N$ est nilpotente, d'après **Q15**.

Mais alors d'après **Q15**, *B* est nulle et donc $N - N' = D' - D = 0_n$, soit $D = D'$ et $N = N'$, et ainsi :

$$\boxed{\text{Avec les hypothèses données, la décomposition de Dunford est unique.}}$$

## Partie IV – Non continuité de l'application $A \mapsto D$

**Q18.** On note $\mathcal{D} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\, A \text{ diagonalisable}\right\}$.

Posons $A = diag\left(1, 2, \ldots, n\right)$ et $B = diag\left(-1, -2, \ldots, -n\right) + E_{1,n}$ (où $E_{1,n}$ est la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le dernier coefficient de la première ligne qui vaut 1).

La matrice *A* est diagonale, donc diagonalisable et *B* est une matrice triangulaire supérieure dont tous coefficients diagonaux sont distincts deux à deux, donc *B* est elle aussi diagonalisable.

Ainsi, $A, B \in \mathcal{D}$, mais, d'après la question **Q16**, $A + B = E_{1,n}$ n'est pas diagonalisable, car elle est nilpotente $E_{1,n}^2 = 0_n$ et non nulle. Ainsi, $A + B \notin \mathcal{D}$ et donc $\mathcal{D}$ n'est pas stable par somme, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

Par ailleurs, pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$, les applications $M \mapsto PM$ et $M \mapsto MP^{-1}$ sont linéaires, donc l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire, comme composée des deux applications précédentes.

Alors, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{L'application } M \mapsto PMP^{-1} \text{ est continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

**Q19.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Toute matrice carrée, dont $A$, est trigonalisable, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

Notons $t_1, \dots, t_n$ les coefficients diagonaux de $T$.

- Si $t_1 = \dots = t_n$, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T_k = T + diag\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{2(k+1)}, \dots, \frac{1}{n(k+1)}\right)$, qui est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $t_1 + \frac{1}{k+1}, t_1 + \frac{1}{2(k+1)}, \dots, t_1 + \frac{1}{n(k+1)}$ tous distinctes, donc $T_k$ est diagonalisable. De plus, pour tout $q \in [\![1, n]\!]$, $t_1 + \frac{1}{q(k+1)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} t_1$, donc $T_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} T$.

- Si au moins deux coefficients diagonaux de $T$ sont distincts, posons $\delta = \frac{1}{3} \min\left\{|t_i - t_j|,\ i, j \in [\![1, n]\!],\ t_i \neq t_j\right\}$.

  On a $\delta > 0$ et on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T_k = T + diag\left(\frac{\delta}{k+1}, \frac{\delta}{2(k+1)}, \dots, \frac{\delta}{n(k+1)}\right)$.

  Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T_k$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux les $t_q + \frac{\delta}{q(k+1)}$ avec $q \in [\![1, n]\!]$.

  Si pour $q, q' \in [\![1, n]\!]$ tels que $q \neq q'$, on a $t_q + \frac{\delta}{q(k+1)} = t_{q'} + \frac{\delta}{q'(k+1)}$, alors :

  $$|t_q - t_{q'}| = \left|\frac{\delta}{q'(k+1)} - \frac{\delta}{q(k+1)}\right| = \frac{\delta}{k+1}\left|\frac{q-q'}{qq'}\right| \leq \frac{\delta}{k+1}\frac{q+q'}{qq'} \leq \frac{\delta}{k+1}\frac{2\max(q,q')}{qq'} \leq \frac{2\delta}{k+1}.$$

  Or, $\delta \leq \frac{1}{3}|t_q - t_{q'}|$, donc $|t_q - t_{q'}| \leq \frac{2}{3(k+1)}|t_q - t_{q'}| < |t_q - t_{q'}|$ qui est absurde. Ainsi, les coefficients diagonaux de $T_k$ sont tous distinctes et $T_k$ est diagonalisable. De plus, pour tout $q \in [\![1, n]\!]$, $t_q + \frac{\delta}{q(k+1)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} t_q$, donc, on a à nouveau $T_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} T$.

Ainsi on vient de construire une suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{D}$ qui converge vers $T$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = PT_kP^{-1}$ est semblable à $T_k$, donc est diagonalisable et par continuité de $M \mapsto PMP^{-1}$, on a $A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} PTP^{-1} = A$.

Ainsi, pour une matrice $A$ quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a construit une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{D}$ qui converge vers $A$. Ceci prouve que $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (l'adhérence) et donc que :

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

**Q20.** Toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet un polynôme caractéristique scindé, donc admet une décomposition de Dunford, $A = D + N$ (où $D$ et $N$ vérifient les conditions (1), (2), (3), (4)). Par unicité de cette décomposition, l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{D}\,;\, A \mapsto D$ est bien définie.

Pour toute matrice $A$ de $\mathcal{D}$, on $A = A + 0_n$ et le couple $(A, 0_n)$ vérifie les conditions (1), (2), (3), (4), donc $\varphi(A) = A$ et ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est l'application identité sur } \mathcal{D}.}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après la question précédente, il existe une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{D}$ qui converge vers $A$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \in \mathcal{D}$, donc $\varphi(A_k) = A_k$ et $\varphi(A_k) = A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$.

Or, si $\varphi$ est continue en $A$, alors $\varphi(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \varphi(A)$ et par unicité de la limite, $A = \varphi(A) \in \mathcal{D}$.

Ainsi, si $\varphi$ était continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ appartiendrait à $\mathcal{D}$, donc serait diagonalisable. Ceci est malheureusement faux, donc :

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$