Corrigé du DS n° 6

I - Autour de la fonction Gamma d'Euler

I.A –

I.A.1) Quel que soit le réel *x*, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions et par croissance comparées $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$, donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge (toujours quel que soit *x*).

De plus, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\sim} t^{x-1}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}dt$ converge si et seulement si $x > 0$, donc il en va de même pour $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $x > 0$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est définie sur } D = \mathbb{R}_+^*.}$$

I.A.2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a, en intégrant par parties :

$$\int_a^b t^x e^{-t}dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_a^b + \int_a^b x\,t^{x-1}e^{-t}dt = a^x e^{-a} - b^x e^{-b} + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}dt .$$

Et, en passant aux limites quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

Soit $x \in D = \mathbb{R}_+^*$. Posons $u_n = \Gamma(x+n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \Gamma(x+n+1) = (x+n)\Gamma(x+n) = (x+n)u_n .$$

Comme $x > 0$, on a $x+k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{(x+n)(x+n-1)...(x+1)x} = \frac{u_n}{(x+n-1)...(x+1)x} .$$

Ainsi, la suite $\left(\dfrac{u_n}{(x+n-1)...(x+1)x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_n}{(x+n-1)...(x+1)x} = \frac{u_1}{x} = u_0 = \Gamma(x) .$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(x+n)=(x+n-1)...(x+1)x\Gamma(x).}$$

En posant $x=1\in D=\mathbb{R}_+^*$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1)=n\times...\times2\times1\times\Gamma(1)=n!\times\Gamma(1)$

Comme $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\Gamma(n)=(n-1)!}$$

I.A.3) Les fonctions $t\mapsto e^{-t^2}$ et $t\mapsto e^{-t^4}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ comme composées de fonctions continues (polynomiales et exponentielle) et par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2e^{-t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}t^2e^{-t^4}=0$.

Donc $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$ et $\int_0^{+\infty}e^{-t^4}dt$ convergent car l'intégrale de Riemann $\int^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge. Ainsi :

$$\boxed{\text{Les intégrales } \int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt \text{ et } \int_0^{+\infty}e^{-t^4}dt \text{ existent bien.}}$$

Les fonctions $t\mapsto t^2$ et $t\mapsto t^4$ sont toutes deux des bijections de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On peut donc effectuer le changement de variable $u=t^2$ dans $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$ et $u=t^4$ dans $\int_0^{+\infty}e^{-t^4}dt$.

Ceci donne :

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-u}\frac{1}{2}u^{-1/2}du=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}u^{1/2-1}e^{-u}du$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^4}dt=\int_0^{+\infty}e^{-u}\frac{1}{4}u^{-3/4}du=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}u^{1/4-1}e^{-u}du$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \text{ et } \int_0^{+\infty}e^{-t^4}dt=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).}$$

I.B –

I.B.1) On considère deux réels a et b tels que $0<a<b$.

Pour tout $x\in[a,b]$ et tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, on a $0<a\le x\le b$ et :

- si $0<t\le1$, $\ln t\le0$ donc $b\ln t\le x\ln t\le a\ln t$, soit $0\le t^b\le t^x\le t^a=\max(t^a,t^b)\le t^a+t^b$;
- si $t\ge1$, $\ln t\ge0$ donc $a\ln t\le x\ln t\le b\ln t$, soit $0\le t^a\le t^x\le t^b=\max(t^a,t^b)\le t^a+t^b$.

Ainsi, dans tous les cas, pour tous $x\in[a,b]$ et $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{0\le t^x\le\max(t^a,t^b)\le t^a+t^b}$$

I.B.2) Notons $f:(x,t)\mapsto t^{x-1}e^{-t}=e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$:

- pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions ;
- pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)=(\ln t)^k e^{(x-1)\ln t}e^{-t}=(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions ;
- pour tout $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $(x,t)\in[a,b]\times\mathbb{R}_+^*$, on a, d'après la question précédente :

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|=\left|\ln t\right|^k t^{x-1}e^{-t}\le\left|\ln t\right|^k (t^a+t^b)t^{-1}e^{-t}=\left|\ln t\right|^k t^{a-1}e^{-t}+\left|\ln t\right|^k t^{b-1}e^{-t}=\varphi(t)\,.$$

La fonction $t\mapsto\left|\ln t\right|^k t^{a-1}e^{-t}$ est positive et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions et :

- par croissance comparées $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{a+1}e^{-t/2}=\lim\limits_{t\to+\infty}(\ln t)^k e^{-t/2}=0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|\ln t\right|^k t^{a+1}e^{-t}=0$ et ainsi, $\left|\ln t\right|^k t^{a-1}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\ln t\right|^k t^{a-1}e^{-t}dt$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ convergente ;
- par croissance comparées $\lim\limits_{t\to0}\left|\ln t\right|^k t^{a/2}e^{-t}=0$ et $\left|\ln t\right|^k t^{a-1}e^{-t}=\left(\left|\ln t\right|^k t^{a/2}e^{-t}\right)t^{a/2-1}$, donc $\left|\ln t\right|^k t^{a-1}e^{-t}\underset{t\to0}{=}o\left(t^{a/2-1}\right)$ et $\displaystyle\int_0^1\left|\ln t\right|^k t^{a-1}e^{-t}dt$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 t^{a/2-1}dt$ convergente (car $\dfrac{a}{2}>0$, donc $\dfrac{a}{2}-1>-1$).

La fonction $t\mapsto\left|\ln t\right|^k t^{a-1}e^{-t}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De la même façon, $t\mapsto\left|\ln t\right|^k t^{b-1}e^{-t}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc, la fonction φ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de telles fonctions.

Tout ceci permet de conclure que la fonction $\Gamma:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ est de classe C^∞ sur $[a,b]$, de dérivées successives $\Gamma^{(k)}:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt=\int_0^{+\infty}(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}dt$.

Comme ceci est vrai pour tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ et $\bigcup_{[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*}[a,b]=\mathbb{R}_+^*$, on peut conclure que :

$$\boxed{\Gamma\text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et pour tous } k\in\mathbb{N} \text{ et } x\in\mathbb{R}_+^*,\ \Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}dt.}$$

I.C –

I.C.1) D'après la question précédente, Γ est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt .$$

Or, $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$ est positive et continue (comme produit de telles fonctions) sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'y annule qu'une seule fois. Ceci permet d'affirmer que $\Gamma''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc s'y annule au plus une fois.

Par ailleurs, on a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ et, d'après la question **I.A.2)**, $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \times \Gamma(1) = 1$. Ainsi, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ et Γ est dérivable sur $[1,2]$ (donc continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$), donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\xi) = 0$. Ainsi, Γ' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement :

$$\boxed{\Gamma' \text{ s'annule exactement une fois sur } \mathbb{R}_+^* \text{ en un réel } \xi \in]1,2[\text{, donc } \lfloor \xi \rfloor = 1.}$$

I.C.2) On vient de voir que Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et s'annule en $\xi \in]1,2[$, donc :

- pour tout $x \in]0,\xi[$, $\Gamma'(x) < \Gamma'(\xi) = 0$;
- pour tout $x \in]\xi,+\infty[$, $\Gamma'(x) > \Gamma'(\xi) = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\Gamma \text{ est strictement décroissante sur }]0,\xi[\text{ et strictement croissante sur }]\xi,+\infty[.}$$

On a vu que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc continue en 1 et avec la relation établie dans la question **I.A.2)**, on a :

$$\lim_{x \to 0} x\Gamma(x) = \lim_{x \to 0} \Gamma(x+1) = \lim_{y \to 1} \Gamma(y) = \Gamma(1) = 1 .$$

Donc, $\Gamma(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \Gamma(x) = +\infty}$$

Comme la fonction Γ est strictement croissante sur $]\xi,+\infty[$, elle admet une limite en $+\infty$ (finie ou infinie). Comme de plus $\Gamma(2) = 1$, si Γ admet une limite finie ℓ en $+\infty$, on a $\ell \geq 1 > 0$ et donc :

$$\lim_{x \to +\infty} x\Gamma(x) = +\infty .$$

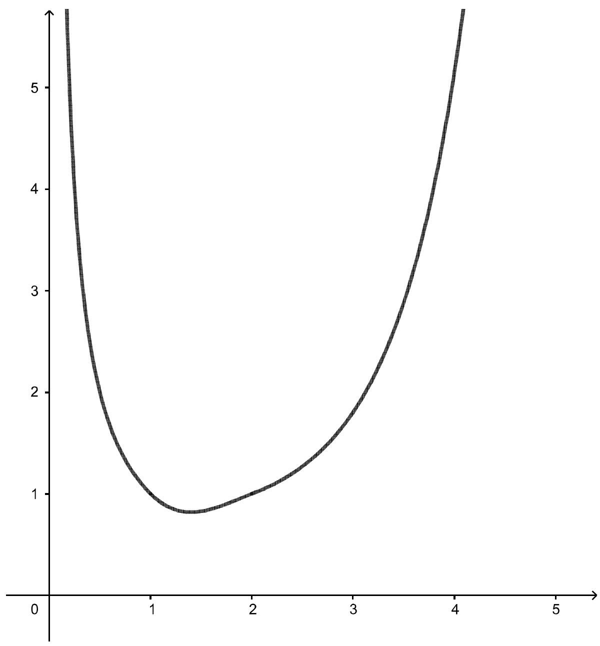
Or, on a toujours $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x+1) = +\infty$.

Mais, $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = \ell$ finie, ce qui est absurde.

Donc, Γ n'admet pas de limite finie en $+\infty$, et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty}$$

On obtient l'allure suivante :



II - Une transformée de Fourier

II.A –

II.A.1) On a $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$; $x\mapsto\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}dt$. Notons $g:(x,t)\mapsto e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}$ définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.

Soit $k\in\mathbb{N}$.

- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}_+^*$ car proportionnelle à une fonction exponentielle.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)=e^{-t}t^{-3/4}(it)^k e^{ixt}$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions.
- Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, on a, d'après la question précédente :

$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right|=\left|e^{-t}t^{-3/4}(it)^k e^{ixt}\right|=e^{-t}t^{k-3/4}.$$

  La fonction $t\mapsto e^{-t}t^{k-3/4}$ est positive et continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions et :

  - on a $e^{-t}t^{k-3/4}\underset{t\to+\infty}{\sim}t^{k-3/4}$ et l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^{k-3/4}dt$ converge (car $k\geq0$, donc $k-\dfrac{3}{4}>-1$) ; ainsi, $\int_0^1 e^{-t}t^{k-3/4}dt$ converge ;

- par croissance comparées $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}t^{k-3/4+2}=0$, donc $e^{-t}t^{k-3/4} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{k-3/4}dt$ converge.

La fonction $t\mapsto e^{-t}t^{k-3/4}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Tout ceci permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La fonction } F : x\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}dt \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

De plus, $F^{(k)} : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)dt$, soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } k\in\mathbb{N},\ F^{(k)} : x\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-3/4}(it)^k e^{ixt}dt.}$$

Enfin, on a $F(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-3/4}dt$.

La fonction $t\mapsto t^{1/4}$ réalise une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et en posant le changement de variable $u=t^{1/4}$, on a :

$$F(0)=\int_0^{+\infty} e^{-u^4}4du = 4\int_0^{+\infty} e^{-u^4}du.$$

Et avec la question **I.A.3**, on obtient :

$$\boxed{F(0)=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

II.B –

II.B.1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, on a $e^{ixt}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ixt)^n}{n!}$, donc :

$$e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-t}t^{-3/4}\frac{(ixt)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}e^{-t}t^{n-3/4}.$$

Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $f_n(t)=\dfrac{(ix)^n}{n!}e^{-t}t^{n-3/4}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $|f_n(t)|=\dfrac{|x|^n}{n!}e^{-t}t^{n-3/4}$ et on a vu dans la question précédente que $t\mapsto e^{-t}t^{n-3/4}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n\in\mathbb{N}$).
- On vient de voir que la série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $t\mapsto e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}$, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}e^{-t}t^{n-3/4}dt=\frac{(ix)^n}{n!}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{n+\frac{1}{4}-1}dt=\frac{(ix)^n}{n!}\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right).$$

On a $\int_0^{+\infty}|f_n(t)|dt=\left|\int_0^{+\infty}f_n(t)dt\right|$ et, d'après la question **I.A.2** :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}+n-1\right)...\left(\frac{1}{4}+1\right)\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1\times5\times...\times(4n-7)\times(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

  - Si $x=0$, alors $\int_0^{+\infty}|f_n(t)|dt=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $\sum\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge.
  - Si $x\neq0$, si on pose $v_n=\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\frac{(ix)^n}{n!}\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right)$, on a $|v_n|=\int_0^{+\infty}|f_n(t)|dt>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et :

$$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|=|x|\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{4}\right)}{(n+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right)}=|x|\frac{\frac{1\times5\times...\times(4n-7)\times(4n-3)\times(4n+1)}{4^{n+1}}}{(n+1)\frac{1\times5\times...\times(4n-7)\times(4n-3)}{4^n}}=|x|\frac{4n+1}{4n+4}\xrightarrow[n\to+\infty]{}|x|.$$

D'après la règle de d'Alembert, $\sum|v_n|$ converge quand $|x|<1$ (et diverge quand $|x|>1$).

Ainsi, la série $\sum\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge quand $|x|<1$.

On peut alors conclure que $t\mapsto e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais on le savait déjà) et que pour tout $x\in\left]-1,1\right[$:

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}e^{-t}t^{n-3/4}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right).$$

Finalement, on a pour tout $x\in\left]-1,1\right[$:

$$\boxed{F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\frac{(ix)^n}{n!}\text{ avec }c_n=\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right)=\frac{1\times5\times...\times(4n-7)\times(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).}$$

Le raisonnement fait plus haut a prouvé que la série $\sum c_n\frac{(ix)^n}{n!}$ converge quand $|x|<1$ et diverge quand $|x|>1$, donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière }\sum c_n\frac{(ix)^n}{n!}\text{ est 1.}}$$

II.B.2) On admet que $\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}$, donc $c_n = \Gamma\left(n+\dfrac{1}{4}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\left(n+\dfrac{1}{4}\right)^{\left(n+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}} e^{-\left(n+\frac{1}{4}\right)}$.

Alors, pour $|x|=1$, on a avec la formule de Stirling :

$$\left|c_n\frac{(ix)^n}{n!}\right| = \frac{c_n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}\left(n+\dfrac{1}{4}\right)^{\left(n+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}} e^{-\left(n+\frac{1}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n} = \frac{n^{-\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^n e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{n^{3/4}} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{4n}\right)-\frac{1}{4}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/4}}.$$

Or, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{3/4}}$ diverge (car $\dfrac{3}{4}<1$), donc, par comparaison, la série $\sum\left|c_n\dfrac{(ix)^n}{n!}\right|$ diverge que $|x|=R=1$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série du second membre de } (S) \text{ ne converge pas absolument lorsque } |x|=R=1.}$$

II.B.3) On pour tout $x\in\left]-1,1\right[$:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + i\sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n+1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Donc :

$$R(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = c_0-\frac{c_2}{2}x^2 + x^4\sum_{n=2}^{+\infty} c_{2n}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2(n-2)} = c_0-\frac{c_2}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^3)$$

$$I(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n+1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = c_1x-\frac{c_3}{6}x^3 + x^5\sum_{n=2}^{+\infty} c_{2n+1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2(n-2)} = c_1x-\frac{c_3}{6}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^4)$$

Or, on a $c_0=\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)$, $c_1=\dfrac{1}{4}\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)$, $c_2=\dfrac{5}{16}\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)$ et $c_3=\dfrac{45}{64}\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)$, donc :

$$\boxed{\begin{aligned} R(x)&=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{5}{32}x^2\right)+\underset{x\to0}{o}(x^3)\\ I(x)&=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{15}{32}x^3\right)+\underset{x\to0}{o}(x^4)\end{aligned}}$$

II.C –

II.C.1) D'après la question ***II.A***, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-3/4}it\, e^{ixt}dt$ et on a aussi $F(0)=\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)$. On a donc pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$F'(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-3/4}it\,e^{ixt}dt = i\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{1/4}e^{ixt}dt.$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. Les fonctions $t\mapsto \dfrac{1}{-1+ix}e^{(-1+ix)t}$ et $t\mapsto t^{1/4}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en intégrant par parties, on a pour tout $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$:

$$\int_a^b e^{-t}t^{1/4}e^{ixt}dt=\left[\frac{1}{-1+ix}e^{(-1+ix)t}t^{1/4}\right]_a^b-\int_a^b\frac{1}{-1+ix}e^{(-1+ix)t}\frac{1}{4}t^{-3/4}dt$$
$$=\frac{1}{-1+ix}\left[e^{-b}b^{1/4}e^{ixb}-e^{-a}a^{1/4}e^{ixa}\right]_a^b+\frac{1}{4}\frac{1}{1-ix}\int_a^b e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}dt$$

Et $\lim\limits_{b\to+\infty}e^{-b}b^{1/4}e^{ixb}=\lim\limits_{a\to0}e^{-a}a^{1/4}e^{ixa}=0$, donc en passant à la limite quand $a\to0$ et $b\to+\infty$ dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$\frac{1}{i}F'(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{1-ix}F(x)\quad\Leftrightarrow\quad F'(x)-\frac{1}{4}\frac{i}{1-ix}F(x)=0.$$

Ainsi :

$$\boxed{F \text{ vérifie sur } \mathbb{R} \text{ l'équation différentielle } F'+AF=0,\text{ où } A:x\mapsto-\frac{1}{4}\frac{i}{1-ix}.}$$

II.C.2) L'équation $F'+AF=0$ est une équation différentielle linéaire, homogène, normalisée, d'ordre 1. Ses solutions sont les fonctions $x\mapsto K\exp\left(-\int^x A(t)dt\right)$ où K est une constante réelle.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$A(x)=-\frac{1}{4}\frac{i}{1-ix}=-\frac{1}{4}\frac{i(1+ix)}{1+x^2}=\frac{1}{8}\frac{2x}{1+x^2}-\frac{i}{4}\frac{1}{1+x^2}.$$

Une primitive de A sur $\mathbb{R}$ est alors $x\mapsto\frac{1}{8}\ln(1+x^2)-\frac{i}{4}\arctan x$ (ô surprise avec la fonction suggérée dans l'énoncé).

Les solutions de l'équation, dont la fonction F recherchée, sont alors les fonctions :

$$x\mapsto K\exp\left(-\frac{1}{8}\ln(1+x^2)+\frac{i}{4}\arctan x\right)=K(1+x^2)^{-\frac{1}{8}}e^{\frac{i}{4}\arctan x}$$

avec $K\in\mathbb{R}$.

Enfin, on a $F(0)=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$. Or avec la formule ci-dessus, on a $F(0)=K$, donc $K=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ et ainsi :

$$\boxed{F:x\mapsto\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)(1+x^2)^{-\frac{1}{8}}e^{\frac{i}{4}\arctan x}}$$

III.A –

III.A.1), **III.A.2)**, **III.A.3)** Voir le cours.

III.B –

III.B.1) Toutes les variables X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) suivent la même loi de Poisson de paramètre λ.

Prouvons alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

- Pour $n=1$, la variable $S_1 = X_1$ suit bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1\times\lambda$, donc la propriété est vraie au rang $n=1$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$.

  Prouvons que S_n et X_{n+1} sont indépendantes. On a $S_n(\Omega) = X_{n+1}(\Omega) = \mathbb{N}$ (par hypothèse de récurrence pour S_n) et pour tous $p, q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P\left(S_n = p, X_{n+1} = q\right) &= P\left(X_1 + \ldots + X_n = p, X_{n+1} = q\right) \\
&= \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n \\ i_1+\ldots+i_n = p}} P\left(X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n, X_{n+1} = q\right) \\
&= \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n \\ i_1+\ldots+i_n = p}} P\left(X_1 = i_1\right)\ldots P\left(X_n = i_n\right) P\left(X_{n+1} = q\right) \quad \text{par indépendance des } X_k \\
&= \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n \\ i_1+\ldots+i_n = p}} P\left(X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n\right) P\left(X_{n+1} = q\right) \quad \text{encore par indépendance des } X_k \\
&= P\left(X_{n+1} = q\right) \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n \\ i_1+\ldots+i_n = p}} P\left(X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n\right) \\
&= P\left(X_{n+1} = q\right) P\left(X_1 + \ldots + X_n = p\right) \\
&= P\left(S_n = p\right) P\left(X_{n+1} = q\right)
\end{aligned}$$

  Donc, S_n et X_{n+1} sont indépendantes (c'est la preuve du lemme des coalitions dans ce cas particulier). Comme S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ (par hypothèse de récurrence) et X_{n+1} suit une loi de Poisson de paramètre λ, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda + \lambda = (n+1)\lambda$ d'après la question **III.A.3**.

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{S_n \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } n\lambda.}$$

III.B.2) D'après le résultat ci-dessus, on a immédiatement :

$$\boxed{E(S_n) = V(S_n) = n\lambda \text{ et } \sigma(S_n) = \sqrt{n\lambda}}$$

Alors, par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$E(T_n) = E\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\left(E(S_n) - n\lambda\right) = 0.$$

Et :

$$V(T_n) = V\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right) = \frac{1}{n\lambda}V(S_n - n\lambda) = \frac{1}{n\lambda}V(S_n) = 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{E(T_n) = 0 \text{ et } \sigma(T_n) = 1}$$

III.B.3) Soit un réel $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Comme T_n admet une espérance et une variance, on peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour tout réel $a > 0$, $P\left(\left|T_n - E(T_n)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(T_n)}{a^2}$, soit $P\left(\left|T_n\right| \geq a\right) \leq \frac{1}{a^2}$ avec les résultats ci-dessus. Alors, en prenant $a = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$, on obtient :

$$P\left(\left|T_n\right| \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \leq \varepsilon.$$

Or, pour tout réel $c \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, on a $\left(\left|T_n\right| \geq c\right) \subset \left(\left|T_n\right| \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, donc $P\left(\left|T_n\right| \geq c\right) \leq P\left(\left|T_n\right| \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } c \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\left|T_n\right| \geq c\right) \leq \varepsilon.}$$

III.C –

III.C.1) La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0, impaire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction polynôme par la fonction exponentielle, toutes deux de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -x e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $x^2 - 1$, donc f' est croissante sur $\left]-\infty, -1\right]$, décroissante sur $\left[-1, 1\right]$, puis de nouveau croissante sur $\left]-\infty, -1\right]$. Comme $\lim\limits_{-\infty} f' = \lim\limits_{+\infty} f' = 0$ et $f'(-1) = -f'(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, on peut conclure que, sur $\mathbb{R}$, f' admet un minimum $(\frac{1}{\sqrt{e}})$ et maximum $(-\frac{1}{\sqrt{e}})$, atteints respectivement en – 1 et 1, et donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

L'inégalité des accroissements finis permet alors de conclure que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$, on a :

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \Leftrightarrow \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}\left|x - y\right|.$$

La dernière inégalité reste vraie quand $x = y$ et donc :

$$\boxed{f \text{ est une fonction } \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ - lipschitzienne sur } \mathbb{R}.}$$

III.C.2) *a*) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$, n peu l'intégrer sur tout segment de $\mathbb{R}$, et :

$$\left| h f(x) - \int_x^{x+h} f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(x)dt - \int_x^{x+h} f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+h} \left[f(x) - f(t) \right] dt \right|.$$

Alors, avec $\left| f(x) - f(t) \right| \le \frac{1}{\sqrt{e}} |x - t|$, on a :

$$\left| h f(x) - \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \le \int_x^{x+h} \left| f(x) - f(t) \right| dt \le \int_x^{x+h} \frac{1}{\sqrt{e}} |x - t| \, dt.$$

Or :

$$\int_x^{x+h} \frac{1}{\sqrt{e}} |x - t| \, dt = \frac{1}{\sqrt{e}} \int_x^{x+h} (x - t) \, dt = \frac{1}{\sqrt{e}} \left[\frac{1}{2} (x - t)^2 \right]_x^{x+h} = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{h^2}{2}.$$

Ainsi, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\left| h f(x) - \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \le \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{h^2}{2}}$$

b) On a $I_n = \left\{ k \in \mathbb{N}, n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \le k \le n\lambda + b\sqrt{n\lambda} \right\}$.

Si $I_n \neq \varnothing$ (autrement dit, il existe au moins un entier naturel entre $n\lambda + a\sqrt{n\lambda}$ et $n\lambda + b\sqrt{n\lambda}$), alors $p = \min I_n$ et $q = \max I_n$ existent et :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k \in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)dt \right| = \left| \sum_{k \in I_n} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} f(x_{k,n}) - \sum_{k \in I_n} \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t)dt \right| = \left| \sum_{k \in I_n} \left[\frac{1}{\sqrt{n\lambda}} f(x_{k,n}) - \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t)dt \right] \right|.$$

Donc :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k \in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)dt \right| \le \sum_{k \in I_n} \left| \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} f(x_{k,n}) - \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t)dt \right|.$$

Or, pour tout $k \in [\![p, q]\!]$, on a :

$$x_{k+1,n} = \frac{k + 1 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} = \frac{k - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} = x_{k,n} + \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}.$$

Donc :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k \in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)dt \right| \le \sum_{k \in I_n} \left| \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} f(x_{k,n}) - \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t)dt \right| \le \sum_{k \in I_n} \left| \frac{1}{2\sqrt{e}} \left(\frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \right)^2 \right| = \frac{\operatorname{Card} I_n}{2n\lambda\sqrt{e}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\left|\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n})-\int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)dt\right| \leq \frac{q-p+1}{2n\lambda\sqrt{e}}}$$

c) On a $I_n=\left\{k\in\mathbb{N},\, n\lambda+a\sqrt{n\lambda}\leq k\leq n\lambda+b\sqrt{n\lambda}\right\}$, $p=\min I_n$ et $q=\max I_n$, donc :

$$n\lambda+a\sqrt{n\lambda}\leq p\leq q\leq n\lambda+b\sqrt{n\lambda}\,.$$

Ce qui implique que :

$$0\leq q-p\leq\left(n\lambda+b\sqrt{n\lambda}\right)-\left(n\lambda+a\sqrt{n\lambda}\right)=(b-a)\sqrt{n\lambda}\,.$$

Alors, le résultat de la question précédente donne :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n})-\int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)dt\right| \leq \frac{q-p+1}{2n\lambda\sqrt{e}}\leq\frac{1}{2\sqrt{e}}\left(\frac{b-a}{\sqrt{n\lambda}}+\frac{1}{n\lambda}\right).$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{e}}\left(\frac{b-a}{\sqrt{n\lambda}}+\frac{1}{n\lambda}\right)=0$, le théorème des gendarmes donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n})-\int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)dt\right)=0\,.$$

Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum\limits_{k\in I_n} f(x_{k,n})=\int_a^b f(t)dt$ revient à prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)dt=\int_a^b f(t)dt$.
Ceci est le cas si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{p,n}=a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{q+1,n}=b$.

Or, en revenant à $p=\min I_n$ et $q=\max I_n$ avec $I_n=\left\{k\in\mathbb{N},\, n\lambda+a\sqrt{n\lambda}\leq k\leq n\lambda+b\sqrt{n\lambda}\right\}$, on peut écrire $q=\left\lfloor n\lambda+b\sqrt{n\lambda}\right\rfloor$ et $p=\left\lfloor n\lambda+a\sqrt{n\lambda}\right\rfloor$ ou $\left\lfloor n\lambda+a\sqrt{n\lambda}\right\rfloor+1$, donc :

$$\begin{cases} n\lambda+b\sqrt{n\lambda}-1<q\leq n\lambda+b\sqrt{n\lambda} \\ n\lambda+a\sqrt{n\lambda}\leq p\leq n\lambda+a\sqrt{n\lambda}+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<x_{q+1,n}=\dfrac{q+1-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq b+\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}} \\ a<x_{p,n}=\dfrac{p-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq a+\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}\end{cases}$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}=0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que l'on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{p,n}=a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{q+1,n}=b$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n})=\int_a^b f(t)dt}$$

III.C.3) *a*) Soit $\varepsilon > 0$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in I_n$, $x_{k,n} = \dfrac{k - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ et, en supposant $k \neq 0$ (c'est le cas pour *n* assez grand car $k \geq n\lambda + a\sqrt{n\lambda}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n\lambda + a\sqrt{n\lambda}\right) = +\infty$) :

$$y_{k,n} = \left(1 - \frac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda}\right)^k \exp\left(x_{k,n}\sqrt{n\lambda}\right) = \left(\frac{n\lambda}{k}\right)^k e^{k-n\lambda} > 0$$

On veut montrer qu'il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N(\varepsilon)$ et tout $k \in I_n$:

$$\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} y_{k,n} \leq e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \leq \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} y_{k,n} \quad \Leftrightarrow \quad 1-\varepsilon \leq \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{n\lambda}}{y_{k,n}} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \leq 1+\varepsilon .$$

Et donc, on veut montrer que pour tout $k \in I_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2\pi} \dfrac{\sqrt{n\lambda}}{y_{k,n}} e^{-n\lambda} \dfrac{(n\lambda)^k}{k!} = 1$.

Or :

$$\sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{n\lambda}}{y_{k,n}} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{n\lambda}}{\left(\frac{n\lambda}{k}\right)^k e^{k-n\lambda}} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \sqrt{\frac{n\lambda}{k}} \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \frac{1}{k!}$$

Et, pour tout $k \in I_n$:

$$n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leq k \leq n\lambda + b\sqrt{n\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{a}{\sqrt{n\lambda}} \leq \frac{k}{n\lambda} \leq 1 + \frac{b}{\sqrt{n\lambda}} .$$

Donc, pour tout $k \in I_n$, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k}{n\lambda} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} k = +\infty$. Alors, comme $k! \underset{k \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi k}\left(\dfrac{k}{e}\right)^k$:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{n\lambda}}{y_{k,n}} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n\lambda}{k}} \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \frac{1}{k!} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \frac{1}{k!} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \frac{1}{k!} = 1 .$$

Finalement :

> Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N(\varepsilon)$ et tout $k \in I_n$:
>
> $$\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} y_{k,n} \leq e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \leq \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} y_{k,n} .$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in I_n$, $f(x_{k,n}) = e^{-\frac{1}{2}x_{k,n}^2} > 0$, donc :

$$(1-\varepsilon) f(x_{k,n}) \leq y_{k,n} \leq (1+\varepsilon) f(x_{k,n}) \quad \Leftrightarrow \quad 1-\varepsilon \leq \frac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})} \leq 1+\varepsilon .$$

On veut montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})} = 1$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $k\in I_n$, $\dfrac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})}=y_{k,n}e^{\frac{1}{2}x_{k,n}^2}=\left(\dfrac{n\lambda}{k}\right)^k e^{k-n\lambda}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{k-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right)^2}>0$, donc :

$$\ln\left(\frac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})}\right)=k\ln\left(\frac{n\lambda}{k}\right)+k-n\lambda+\frac{1}{2}\left(\frac{k-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right)^2=-k\ln\left(\frac{k}{n\lambda}\right)+k-n\lambda+\frac{1}{2}\left(\frac{k-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right)^2$$

Or, on a vu que pour tout $k\in I_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{k}{n\lambda}=1$, donc en posant $\alpha_n=\dfrac{k}{n\lambda}-1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$ et :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})}\right)&=-k\ln(1+\alpha_n)+n\lambda\alpha_n+\frac{1}{2}\left(\frac{n\lambda\alpha_n}{\sqrt{n\lambda}}\right)^2\\&=n\lambda\left[\alpha_n+\frac{1}{2}\alpha_n^2-(1+\alpha_n)\left(\alpha_n-\frac{1}{2}\alpha_n^2+\underset{n\to+\infty}{o}(\alpha_n^2)\right)\right]\\&=\underset{n\to+\infty}{o}(n\lambda\alpha_n^2)\end{aligned}$$

Et $n\lambda\alpha_n^2=n\lambda\left(\dfrac{k}{n\lambda}-1\right)^2=\left(\dfrac{k-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right)^2$. Or :

$$n\lambda+a\sqrt{n\lambda}\le k\le n\lambda+b\sqrt{n\lambda}\quad\Leftrightarrow\quad a\le\frac{k-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\le b\,.$$

Donc, la suite $\left(n\lambda\alpha_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et $\underset{n\to+\infty}{o}(n\lambda\alpha_n^2)=\underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Finalement, on obtient $\ln\left(\dfrac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})}\right)=\underset{n\to+\infty}{o}(1)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\dfrac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})}\right)=0$, soit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})}=1.$$

Ainsi :

> Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n\ge N(\varepsilon)$ et tout $k\in I_n$:
> $$(1-\varepsilon)f(x_{k,n})\le y_{k,n}\le(1+\varepsilon)f(x_{k,n})\,.$$

Remarquons que, quitte à prendre le plus grand des deux, on peut choisir le même $N(\varepsilon)$ dans les questions *a*) et *b*).

III.C.4) D'après la question **III.C.3**, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n\ge N(\varepsilon)$ et tout $k\in I_n$:

$$\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}y_{k,n}\le e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!}\le\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}y_{k,n}\ \text{ et }\ (1-\varepsilon)f(x_{k,n})\le y_{k,n}\le(1+\varepsilon)f(x_{k,n})\,.$$

Donc pour tout $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} y_{k,n} \leq \sum_{k\in I_n} e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!} \leq \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} y_{k,n} .$$

Ceci prouve que pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, $1-\varepsilon \leq \dfrac{\displaystyle\sum_{k\in I_n} e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!}}{\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} y_{k,n}} \leq 1+\varepsilon$ et donc que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\sum_{k\in I_n} e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!}}{\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} y_{k,n}} = 1 \iff \sum_{k\in I_n} e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} y_{k,n} .$$

Par ailleurs, on a aussi pour tout $n \geq N(\varepsilon)$:

$$(1-\varepsilon)\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) \leq \sum_{k\in I_n} y_{k,n} \leq (1+\varepsilon)\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}).$$

Donc, comme ci-dessus, on obtient $\displaystyle\sum_{k\in I_n} y_{k,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k\in I_n} f(x_{k,n})$ et ainsi :

$$\sum_{k\in I_n} e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}).$$

Enfin, d'après la question **III.C.2.***c*, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) = \int_a^b f(t)dt$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\in I_n} e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f(t)dt}$$

III.C.5) On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ où S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

On a alors :

$$P\left(a \leq T_n \leq b\right) = P\left(a \leq \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq b\right) = P\left(n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leq S_n \leq n\lambda + b\sqrt{n\lambda}\right) = P\left(S_n \in I_n\right).$$

Soit :

$$\boxed{P\left(a \leq T_n \leq b\right) = \sum_{k\in I_n} P\left(S_n = k\right)}$$

III.C.6) Rappelons que la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Par croissances comparées, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ converge, donc, *f* est intégrable que $[a,+\infty[$ pour tout réel *a*.

Soit a un réel fixé.

D'après les deux questions précédentes, pour tout $b \in [a, +\infty[$, on a :

$$\underline{\lim_{n \to +\infty} P(a \leq T_n \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(t)dt .}$$

On peut donc supputer que $\lim_{n \to +\infty} P(a \leq T_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(t)dt$.

Pour tout $b \in [a, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(a \leq T_n \leq b) \leq P(a \leq T_n) = P(a \leq T_n \leq b) + P(T_n > b).$$

Or, $(T_n > b) \subset (T_n \geq b) \subset (|T_n| \geq b) = (T_n \geq b) \cup (T_n \leq -b)$, donc :

$$0 \leq P(T_n > b) \leq P(|T_n| \geq b).$$

Soit un réel $\varepsilon > 0$. D'après la question **III.B.3**, il existe $b_1 \in [a, +\infty[$ tel que pour tout $b \geq b_1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(|T_n| \geq b) \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $b \geq b_1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(a \leq T_n \leq b) \leq P(a \leq T_n) \leq P(a \leq T_n \leq b) + \varepsilon .$$

Par ailleurs, f est positive donc $-\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq -\int_a^b f(t)dt$ et $\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(t)dt$ donc il existe $b_2 \in [a, +\infty[$ tel que pour tout $b \geq b_2$, on a :

$$-\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(t)dt \leq -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(t)dt \leq -\int_a^b f(t)dt .$$

Alors, pour $b = \max(b_1, b_2)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left[P(a \leq T_n \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(t)dt\right] - \varepsilon \leq P(a \leq T_n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \left[P(a \leq T_n \leq b) - \int_a^b f(t)dt\right] + \varepsilon .$$

Or, pour cette valeur de b fixée, on a $\lim_{n \to +\infty} P(a \leq T_n \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(t)dt$, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tour entier $n \geq N$, $-\varepsilon \leq P(a \leq T_n \leq b) - \int_a^b f(t)dt \leq \varepsilon$ et donc :

$$-2\varepsilon \leq P(a \leq T_n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(t)dt \leq 2\varepsilon .$$

Finalement, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tour entier $n \geq N$:

$$\left| P(a \leq T_n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(t)dt \right| \leq 2\varepsilon .$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(T_n \geq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(t)dt}$$

Pour tous réels a et $\varepsilon > 0$, on a :

$$0 \leq P(T_n = a) \leq P(a \leq T_n \leq a + \varepsilon).$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \leq T_n \leq a+\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_a^{a+\varepsilon} f(t)dt \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon$ (car $f \leq 1$ sur $\mathbb{R}$) donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tour entier $n \geq N$, $P(a \leq T_n \leq a+\varepsilon) \leq \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon$ et donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tour entier $n \geq N$, $0 \leq P(T_n = a) \leq \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(T_n = a) = 0}$$

Comme $(T_n = a) \bigcup (T_n > a) = (T_n \geq a)$ et l'union est disjointe, on a :

$$P(T_n = a) + P(T_n > a) = P(T_n \geq a) \quad \Leftrightarrow \quad P(T_n > a) = P(T_n \geq a) - P(T_n = a).$$

Et avec les deux résultats précédents, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(T_n > a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} f(t)dt}$$

Enfin, pour tout réel b, on a $P(T_n \leq b) = 1 - P(T_n > b)$ et résultat ci-dessus donne :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(T_n \leq b) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^{+\infty} f(t)dt}$$

III.D –

III.D.1) On a établi dans la question précédente la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$. Comme f est paire, on a aussi la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et alors (*alors seulement*) on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{c} f(t)dt.$$

Or, pour tout réel c, on a $\Omega = (|T_n| > c) \bigcup (-c \leq T_n \leq c)$ et l'union est disjointe, donc :

$$P(\Omega) = 1 = P(|T_n| > c) + P(-c \leq T_n \leq c).$$

Pae ailleurs, on a établi dans la question **III.C.6** que, pour tout réel $c > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} P(-c \leq T_n \leq c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^{c} f(t)dt.$$

Soit un réel $\varepsilon > 0$. D'après la question **III.B.3**, il existe un réel $c_0 > 0$ tel que pour tout réel $c \geq c_0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(|T_n| \geq c) \leq \varepsilon$ et comme $(|T_n| > c) \subset (|T_n| \geq c)$, on a aussi $P(|T_n| > c) \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout réel $c \geq c_0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq 1 - P(-c \leq T_n \leq c) = P(|T_n| > c) \leq \varepsilon$ et en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient avec le résultat rappelé ci-dessus, pour tout réel $c \geq c_0$:

$$0 \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^{c} f(t)dt \leq \varepsilon .$$

En passant alors à la limite quand $c \to +\infty$, on a pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$0 \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \leq \varepsilon .$$

Ceci permet de conclure que $1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$ et donc que :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \sqrt{2\pi}}$$

III.D.2) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$e^{-n\lambda} A_n = e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\lfloor n\lambda \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n\lambda \rfloor} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n\lambda \rfloor} P(S_n = k) = P(S_n \leq \lfloor n\lambda \rfloor).$$

Or, comme $S_n(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $(S_n \leq \lfloor n\lambda \rfloor) = (S_n \leq n\lambda) = (T_n \leq 0)$ et donc :

$$e^{-n\lambda} A_n = P(T_n \leq 0).$$

Alors, avec la question **III.C.6**, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-n\lambda} A_n = \lim_{n \to +\infty} P(T_n \leq 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)dt .$$

Enfin comme *f* est paire, $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-n\lambda} A_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{2} .$$

Ainsi :

$$\boxed{A_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^{n\lambda}}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-n\lambda} A_n + e^{-n\lambda} B_n = e^{-n\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n\lambda \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} + \sum_{k=\lfloor n\lambda \rfloor + 1}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \right) = e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = 1$, on a immédiatement $\lim_{n \to +\infty} e^{-n\lambda} B_n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et :

$$\boxed{B_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^{n\lambda}}$$

III.D.3) Comme plus haut, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$e^{-n\lambda}C_n = P\left(S_n \le n\right) = P\left(T_n \le \frac{n-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right) = P\left(T_n \le \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n}\right).$$

Et pour tout $b\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(T_n \le b\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{+\infty} f(t)dt$ d'après la question **III.C.6**.

Or, $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{+\infty} f(t)dt = 0$, donc pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $b\in\mathbb{R}_+^*$, tel que :

$$1-\varepsilon \le 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{+\infty} f(t)dt \le 1.$$

Pour cette valeur de *b*, il existe alors un entier $N_1\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n\ge N_1$:

$$\left|P\left(T_n \le b\right) - \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{+\infty} f(t)dt\right)\right| \le \varepsilon.$$

Alors :

$$-\varepsilon+1-\varepsilon \le -\varepsilon+1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{+\infty} f(t)dt \le P\left(T_n\le b\right) \le \varepsilon+1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{+\infty} f(t)dt \le \varepsilon+1.$$

Soit :

$$1-2\varepsilon \le P\left(T_n\le b\right) \le \varepsilon+1.$$

Si $\lambda<1$, alors $1-\lambda>0$ et $\frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, donc il existe $N_2\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n\ge N_2$, on a $\frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n}\ge b$. Alors, $\left(T_n\le b\right)\subset\left(T_n\le\frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n}\right)$ et :

$$P\left(T_n\le b\right) \le P\left(T_n \le \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n}\right) = e^{-n\lambda}C_n \le 1.$$

Ainsi, pour tout entier $n\ge N=\max\left(N_1,N_2\right)\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$1-2\varepsilon \le P\left(T_n\le b\right) \le e^{-n\lambda}C_n \le 1.$$

Finalement, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n\ge N$, $1-2\varepsilon\le e^{-n\lambda}C_n\le 1$, ce qui prouve que si $\lambda<1$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} e^{-n\lambda}C_n = 1}$$

De la même façon, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$e^{-n\lambda}D_n = P\left(S_n\ge n+1\right) = P\left(T_n \ge \frac{n-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right) = P\left(T_n \ge \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n}\right).$$

Avec (toujours d'après la question **III.C.6**), $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(T_n \geq a\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{a\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n} = -\infty$ si $\lambda > 1$, on prouve de la même manière que ci-dessus que quand $\lambda > 1$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} e^{-n\lambda} C_n = 1}$$

III.E –

III.E.1) Le réel strictement positif λ étant fixé, on cherche :

$$\lim_{n\to+\infty} (n\lambda)^{-n} \int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n e^t dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\lambda} \left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t dt.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n\lambda}\right)^n e^t & \text{quand } t \in [0, n\lambda] \\ 0 & \text{quand } t \in]\, n\lambda, +\infty [\end{cases}$$

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{n\lambda} \left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (comme produit de fonctions continues sur $[0, n\lambda]$ et comme fonction constante sur $]\, n\lambda, +\infty [$).
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \in [0, n\lambda]$ quand $n \geq \dfrac{t}{\lambda}$ et :

  $$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n\lambda}\right)} e^t = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(-\frac{t}{n\lambda} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} e^t = e^{t - \frac{t}{\lambda}} = e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}t}$$

  Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $t \mapsto e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}t}$ qui est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (c'est une fonction exponentielle).
- Pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\ln h \leq h - 1$ (il suffit d'étudier $h \mapsto \ln h - (h-1)$), donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

  $$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n\lambda}\right)} e^t \leq e^{n\left(-\frac{t}{n\lambda}\right)} e^t = e^{t-\frac{t}{\lambda}} = e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}t}.$$

  Et, $t \mapsto e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de la voir) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car ici $0 < \lambda < 1$, donc $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} > 0$.

Finalement, d'après le théorème de convergence dominée, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ ($t\mapsto e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}t}$ aussi, mais on vient de le voir) et :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt=\int_0^{+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right]dt=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}t}dt=\left[-\frac{\lambda}{1-\lambda}e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}t}\right]_0^{+\infty}=\frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(n\lambda)^{-n}\int_0^{n\lambda}(n\lambda-t)^n e^t dt=\frac{\lambda}{1-\lambda}}$$

III.E.2) La fonction exponentielle est de classe sur $\mathbb{R}$, on peut donc écrire la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et $x\in\mathbb{R}$ à tout ordre $n\in\mathbb{N}$, qui donne :

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\exp^{(n+1)}(t)dt=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n e^t dt.$$

Et en posant $x=n\lambda$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$e^{n\lambda}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^{n\lambda}(n\lambda-t)^n e^t dt.$$

Or, $D_n=e^{n\lambda}-C_n=e^{n\lambda}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$D_n=\frac{1}{n!}\int_0^{n\lambda}(n\lambda-t)^n e^t dt=\frac{(n\lambda)^n}{n!}(n\lambda)^{-n}\int_0^{n\lambda}(n\lambda-t)^n e^t dt.$$

Et avec $\lim_{n\to+\infty}(n\lambda)^{-n}\int_0^{n\lambda}(n\lambda-t)^n e^t dt=\frac{\lambda}{1-\lambda}\neq 0$, on peut écrire :

$$D_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{(n\lambda)^n}{n!}\frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Enfin, la formule de Stirling $n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ donne $D_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{(n\lambda)^n e^n}{\sqrt{2\pi n}\,n^n}\frac{\lambda}{1-\lambda}$, soit :

$$\boxed{D_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{(e\lambda)^n}{\sqrt{2\pi n}}}$$

III.F –

Soient $r\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

Les fonctions $t\mapsto(r-t)^{n+1}$ et $t\mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (de dérivée $t\mapsto-(n+1)(r-t)^n$ pour la première). Une intégration par parties donne alors pour tout $A\in\mathbb{R}_+$:

$$\int_{-A}^{0}(r-t)^{n+1}e^t dt=\left[(r-t)^{n+1}e^t\right]_{-A}^{0}+(n+1)\int_{-A}^{0}(r-t)^n e^t dt.$$

Comme $\lim\limits_{t\to-\infty}(r-t)^{n+1}e^t=\lim\limits_{X\to+\infty}X^{n+1}e^{-X}e^{-r}=0$ par croissances comparées, on a :

$$\int_{-\infty}^{0}(r-t)^{n+1}e^t dt=r^{n+1}+(n+1)\int_{-\infty}^{0}(r-t)^n e^t dt\,.$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $r\in\mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)!}\int_{-\infty}^{0}(r-t)^{n+1}e^t dt=\frac{1}{(n+1)!}r^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}(n+1)\int_{-\infty}^{0}(r-t)^n e^t dt\,.$$

Soit, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)!}r^{n+1}$, en posant $u_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}(r-t)^n e^t dt$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par télescopage, on obtient alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $r\in\mathbb{R}$:

$$u_{n+1}-u_0=\sum_{k=0}^{n}\left(u_{k+1}-u_k\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!}r^{k+1}\,.$$

En réindexant le membre de droite et avec $u_0=\dfrac{1}{0!}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^t dt=\left[e^t\right]_{-\infty}^{0}=1=\dfrac{1}{0!}r^0$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $r\in\mathbb{R}$:

$$u_{n+1}=u_0+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}r^k=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}r^k\,.$$

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $r\in\mathbb{R}$:

$$u_n=\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{0}(r-t)^n e^t dt=\sum_{k=0}^{n}\frac{r^k}{k!}\,.$$

En prenant alors $r=n\lambda$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}C_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}&=\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{0}(n\lambda-t)^n e^t dt=\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{0}(n\lambda-t)^n e^t dt\\&=\frac{(n\lambda)^n}{n!}\int_{-\infty}^{0}\left(1-\frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t dt=\frac{(n\lambda)^n}{n!}\int_{-\infty}^{0}f_n(t)dt\end{aligned}$$

avec $f_n:t\mapsto\left(1-\dfrac{t}{n\lambda}\right)^n e^t$ comme dans la question **III.E.1**.

Comme dans la question **III.E.1**, on a :

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_-$;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_-$ vers $t\mapsto e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}t}$ qui est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_-$ (c'est une fonction exponentielle) ;
- pour tout $h\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln h\le h-1$, donc pour tout $t\in\mathbb{R}_-$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n\lambda}\right)}\le e^{-\frac{t}{\lambda}}$ et :

$$f_n(t)\le e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}t}$$

et la fonction exponentielle $t \mapsto e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_-$ (on vient de la voir) et intégrable sur $\mathbb{R}_-$ car ici $\lambda > 1$, donc $\dfrac{\lambda-1}{\lambda} > 0$.

Le théorème de convergence dominée, permet alors de conclure que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_-$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{0} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{0} \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right]dt = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}t}dt = \left[\frac{\lambda}{\lambda-1}e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}t}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Avec $C_n = \dfrac{(n\lambda)^n}{n!}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_n(t)dt$ et $\dfrac{\lambda}{\lambda-1} > 0$, on peut conclure que :

$$\boxed{C_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{(n\lambda)^n}{n!}}$$