Entrainement n° 4

Séries Numériques

Exercice 66 (CCP 2016 - Séries numériques).
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \left[\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)^n - e\right]$?

Exercice 68 (CCP 2017 - Séries numériques). Voir corrigé
Convergence de la série de terme général $u_n = \ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$.

Exercice 70 (CCP 2017 - Séries numériques).
On note $a_n = \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}$ et $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
On rappelle que : $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Montrer que $\sum a_n$ converge.
2. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} (H_{2n+1} - H_n) = \ln(2)$
3. Montrer qu'il existe a, b et c dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$ et trouver a, b et c.
4. Trouver $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 75 (CCP 2017 - Séries numériques).
Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $\sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 91 (Mines-Telecom (4) 2017 - Séries numériques).

1. Peut-on définir la nature de la série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n \ln n}$ grâce à la règle de d'Alembert ?
2. Rappeler le théorème de comparaison série-intégrale et en déduire la convergence de la série.

Exercice 108 (Centrale 2016 - Suites et séries).

On pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. On se place dans le cas $\alpha > 1$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Déterminer la limite de (u_n) selon la valeur de α.
3. On suppose $\alpha > 1$ et on pose $v_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Déterminer la nature de la série de terme général v_n selon la valeur de α.

Exercice 105 (Mines-Ponts 2016 - Séries).

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2^n - 1}}{1 + x^{2^n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
   Soit N un entier naturel, et x un réel tel que $|x| < 1$.
2. Simplifier $\prod_{n=0}^{N} \left(1 + x^{2^n}\right)$.
3. Expliciter f.