Entrainement n° 5

Probabilités

Exercice 1

On considère une suite d'épreuves indépendantes de Bernoulli définies sur un même espace probabilisé (Ω, A, P), de paramètre $p \in]0,1[$ (p probabilité d'obtenir un succès).
On appelle doublé le fait d'obtenir deux succès de suite. On note $q = 1 - p$.
On introduit les évènements suivants :
A_n : « obtenir au moins un doublé au cours des n premières épreuves. »
B_n : « obtenir le premier doublé aux rangs $n-1$ et n. »
On note $p(B_n) = p_n$.

1. Montrer que $p(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k$.

   Montrer que $p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$.
2. En déduire une relation entre $p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}$ et p_n.
3. Résoudre cette relation de récurrence.

   On pourra s'aider de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -pq^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 3

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = P(Y=k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X,Y)$ et $V = \inf(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P(V=n) = pq^{2n}(1+q)$.
3. Prouver que $W = V+1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 5

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer l'existence d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $G_X(t) = \dfrac{1}{2-t^\alpha}$.
2. Donner un équivalent de $P(X=n)$ lorsque $n \to +\infty$ dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $P(X \geqslant (\lambda+1)\alpha) \leqslant \dfrac{2\alpha}{\lambda^2}$.