Concours blanc

du lundi 7 mars 2022

Compte-rendu de Mme Panichi-Cochet, correctrice

Sujet d'après

Concours Commun Centrale Sup'Elec

Session 2020 - Filière PSI

Épreuve de mathématiques 1

Remarques générales :

- La plupart des élèves ont abordé les trois parties du problème : presque tous ont fait (plutôt bien) la partie I, presque tous se sont au moins essayés à la partie II (mais cette fois avec plus ou moins de succès...) et beaucoup sont allés jusqu'à la partie III, mais en traitant essentiellement les trois premières questions.
- Parallèlement à la première remarque, beaucoup d'élèves semblent aussi avoir une certaine rapidité, ce qui est un atout quand ce n'est pas au détriment de la qualité. Un nombre non négligeable d'étudiants a malheureusement confondu vitesse et précipitation : ils sont allés très loin dans le problème mais c'est constellé d'erreurs, dont certaines rédhibitoires ! Attention à cela : avancer à tout prix n'est pas toujours rentable.
- ATTENTION : Oui à l'usage des quantificateurs, mais à bon escient. PAS DE QUANTIFICATEUR DANS LES PHRASES, DANS LA RÉDACTION. Les quantificateurs s'utilisent, comme leur nom l'indique, dans les énoncés quantifiés.

  Le langage quantifié est un langage mathématique avec des règles strictes. Les quantificateurs ne sont pas des outils bien pratiques pour gagner du temps. Banir par exemple les choses du type « la propriété est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ » en fin de récurrence.

  De façon générale, il faut séparer clairement les parties phrasées, rédigées, des parties « mathématiques », ne pas mélanger les genres.
- ATTENTION aux « FATAL ERRORS » ou HORREURS, c'est-à-dire les erreurs graves, qui risquent de mettre à mal la confiance du correcteur, voire de vous mettre le correcteur à dos, et, au pire de l'inciter à arrêter la correction de votre copie pour mettre une note RANDOM en 2 et 5. J'insiste : certaines INEPTIES n'ont pas leur place le jour du concours. Ces FATAL ERRORS n'ont pas été légion dans les copies de PSI*, mais certains élèves ont la palme du nombre d'horreurs dans leur copie. ATTENTION donc.

PARTIE I

C'est clairement la partie la plus réussie par les élèves. Beaucoup ont fait la majorité de leurs points sur cette partie.

Quelques remarques plus précises sur certaines questions :

Q.1. Le lemme des coalitions était ici toléré. Ne pas perdre de vue que ce résultat n'est pas au programme, et que par conséquent il faut à tout prix savoir faire une démonstration directe le jour du concours.

Q.2. Beaucoup d'élèves se bornent à un simple calcul et n'évoquent en aucun cas la convergence de la série génératrice avant de calculer sa somme !

Q.3. Quelques élèves ont utilisé directement $G_{X_1+X_2+\cdots+X_n} = G_{X_1}G_{X_2}\cdots G_{X_n}$ pour $X_1,\ldots,X_n$ varibles aléatoires mutuellement indépendantes, alors que le résultat au programme ne concerne que la fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires X, Y indépendantes. On attendait donc ici un raisonnement par récurrence.

Et parmi ceux qui ont procédé à une démonstration par récurrence, curieusement, dans cette question, beaucoup n'ont pas formulé la proposition de récurrence ! Le raisonnement est donc fait sans savoir au départ de quoi on parle...

Q.4. Très peu d'élèves ont correctement rédigé cette question... Une fois obtenue l'expression $G_{S_n}(t) = e^{\frac{n}{2}(t-1)}$ pour tout réel t, il faut **d'une part** reconnaître en $t \mapsto e^{\frac{n}{2}(t-1)}$ la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{n}{2}$, **d'autre part** préciser que la fonction génératrice d'une variable aléatoire détermine entièrement la loi suivie par la variable pour conclure que S_n suit effectivement une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{n}{2}$.

Q.7. La convergence normale de la série de fonctions n'est pas souvent bien justifiée. Certains affirment que $\|\infty\|\, u_n = u_n(0)$ sans le justifier, d'autres (beaucoup) majorent $u_n(x)$ par $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ SANS PRECISER QUE u_n EST POSITIVE NI METTRE DE VALEUR ABSOLUE.

Q.8. Certains peinent à suivre le fil conducteur du problème, et ici n'ont pas remrqué qu'il s'agissait de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} u_k\left(\frac{1}{n}\right)$.

Des confusions chez un certain nombre d'élèves qui parlent de convergence normale pour une série numérique...

Q.9. L'application du théorème d'encadrement de limite laisse à désirer chez certains.

L'encadrement $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ entre des termes positifs avec l'hypothèse de convergence de la suite (u_n) et de la suite (w_n) vers une même limite ℓ donne à la fois LA CONVERGENCE de la suite (v_n) et la valeur de sa limite qui est ℓ. Il est incorrect de juste passer à la limite dans l'encadrement sans avoir préalablement justifier la convergence !

PARTIE II

Cette partie II a dans la majorité des copies été mal comprise et donc mal traitée.

Q.11. L'implication $x \geqslant 0 \Rightarrow Ax \geqslant 0$ est bien faite en général.

En revanche, beaucoup d'élèves ont affirmé que $x \geqslant 0$ et $x \neq 0$ impliquent $x > 0$, ce qui n'est pas le cas ! ! ! $x \geqslant 0$ indique que toutes les composantes de x sont positives ou nulles. $x \neq 0$ indique qu'au moins une composante de x est non nulle et donc strictement positive. Mais il n'y a aucune raison pour que TOUTES les composantes soient strictement positives !

Q.12. Quelques comiques traitent la relation d'ordre comme n'importe quelle relation d'ordre classique entre nombres réels, et affirment tout de go que $A^k > 0$ et $A > 0$ impliquent $A^{k+1} > 0$...

Q.13. Question globalement mal traitée. Démontrer clairement $\mathrm{Sp}\left(\dfrac{A}{\alpha}\right) = \dfrac{1}{\alpha}\mathrm{Sp}(A)$ pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ n'est soit pas fait du tout (on manipule allègrement les max d'ensembles qu'on a même pas décrits correctement) soit très mal fait : on se contente d'une implication $Ax = \lambda x \Rightarrow \dfrac{A}{\alpha}x = \dfrac{\lambda}{\alpha}$ pour conclure.

For heureusement quelques rares élèves ont fait cela parfaitement.

Q.14. Trop d'élèves oublient les modules ! $\rho(A) < 1$ donne $|\lambda| < 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ mais pas $\lambda < 1$! D'autant que les valeurs propres sont a priori ici complexes !

Q.16. Beaucoup d'élèves là aussi manipulent mal la relation d'ordre : on affirme que $|x| \leqslant A|x|$ (montré en Q.15) $A|x| \neq |x|$ donnent $A|x| > |x|$ ce qui est FAUX. Même erreur qu'en Q.11.

Beaucoup de méthodes fantaisistes, d'affirmations infondées...

Seuls 2 ou 3 élèves ont réussi cette question.

Q.17. Très mal traitée aussi !

Tout le monde a pensé à faire une récurrence, mais trop d'élèves affirment que si $B^kA|x| \geqslant A|x|$ alors tout de suite $B^{k+1}A|x| \geqslant BA|x[$, comme si on pouvait multiplier une inégalité par une matrice strictement positive comme on multiplie une inégalité entre deux réels pas un réel positif...

Certains mais trop peu ont vu la subtilité : utiliser la Q.11 pour établir les inégalités utiles.

Q.18. Beaucoup peinent à suivre le fil conducteur. Là aussi, certains donnent des arguments fantaisistes.
Ceux qui suivent le fil et pensent à remarquer que $B > 0$ et à démontrer $\rho(B) < 1$ pour se ramener aux conditions de la Q.14 ont rarement démontré correctement $\rho(B) = \dfrac{1}{1+\varepsilon}$.

Q.19. Il faut aller au bout de la conclusion. Nombre d'élèves pensent à conclure $A|x| = |x|$ mais très peu vont jusqu'à dire que 1 est donc valeur propre de A (alors que c'est ce qu'on cherchait à démontrer !!!), et UN SEUL élève pense à préciser que PARCE QUE $|x| \neq 0$ on peut conclure que $|x|$ est vecteur propre de A pour la valeur propre 1 et donc que 1 est valeur propre de A.

Q.20. Rarement bien fait.

Q.21. Quasiment pas traitée.

Q.22. Quasiment pas traitée. Quelques tentatives intéressantes même si elles ne permettent pas de conclure.

Q.23. Mal comprise. Beaucoup se contentent de résumer ce qui a été fait dans le cas $\rho(A) = 1$, mais n'expliquent pas pourquoi la proposition 1 est finalement prouvée même si $\rho(A)$ n'est pas égal à 1.

Q.24. $A^pY = \lambda^pY$ lorsque $Y \in E_\lambda(A)$ est très rarement démontrée.

Q.25. Peu faite mais de jolies tentatives, assez fructueuses.

Q.26. Question traitée par presque tout le monde mais des maladresses... Un bon tiers de ceux qui ont traité cette question ont directement trigonalisé A^k sans passer par la trigonalisation de A puis l'élévation à la puissance k. Donc ils obtiennent les valeurs propres de A^k sur la diagonale mais ne précisent pas qu'il s'agit des puissances k-èmes des valeurs propres de A !!!

Q.27. Les quelques-uns qui ont traité cette question ont oublié de tenir compte de l'ordre de multiplicité de la valeur propre dominante.

PARTIE III

Cette partie, abordée en fin d'épreuve, a été le siège de grands n'importe quoi...

Q.28. Trop d'élèves affirment que les $((X_{n+1} = j), (X_n = i))_{\substack{0 \leqslant j \leqslant N \\ 0 \leqslant i \leqslant N}}$ est un système complet d'événements !!! QUEL SENS ? ? ?

Q.29. Il n'y a pas grand chose à écrire mais certains trouvent le moyen de ne même pas écrire le minimum !

Q.30. Il faut passer par $\Pi_n = \left(Q^\top\right)^{n-1} \Pi_1$ avant de conclure !

Q.35. Les quelques-uns qui sont venus jusque là ont mal traité cette question. On affirme $tam - \lambda(t) \leqslant \lambda^*(am)$ (logique vu la définition de λ^*) mais omettent qu'en multipliant par $-n$, cela va changer le sens de l'inégalité...