Corrigé du Concours Blanc (Centrale 2020 – PSI – Maths 1)

I - Cas de la loi de Poisson

I.A –

Q1. La variable $S_n = X_1 + ... + X_n$ de dépend pas de X_{n+1}. Comme les X_k sont indépendantes, le lemme des coalitions permet de conclure que :

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } S_n \text{ et } X_{n+1} \text{ sont indépendantes.}}$$

Sans le lemme des coalitions :

On a $S_n(\Omega) = X_{n+1}(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P(S_n = p, X_{n+1} = q) &= P(X_1 + ... + X_n = p, X_{n+1} = q) \\
&= \sum_{\substack{(i_1,...,i_n)\in\mathbb{N}^n \\ i_1+...+i_n=p}} P(X_1 = i_1, ..., X_n = i_n, X_{n+1} = q) \\
&= \sum_{\substack{(i_1,...,i_n)\in\mathbb{N}^n \\ i_1+...+i_n=p}} P(X_1 = i_1)...P(X_n = i_n)P(X_{n+1} = q) \text{ par indépendance des } X_k \\
&= \sum_{\substack{(i_1,...,i_n)\in\mathbb{N}^n \\ i_1+...+i_n=p}} P(X_1 = i_1, ..., X_n = i_n)P(X_{n+1} = q) \text{ encore par indépendance des } X_k \\
&= P(X_{n+1} = q) \sum_{\substack{(i_1,...,i_n)\in\mathbb{N}^n \\ i_1+...+i_n=p}} P(X_1 = i_1, ..., X_n = i_n) \\
&= P(X_{n+1} = q)P(X_1 + ... + X_n = p) \\
&= P(S_n = p)P(X_{n+1} = q)
\end{aligned}$$

Donc, S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

Q2. La variable X_1 suit une loi de Poisson de paramètre ½, donc $P(X_1 = k) = e^{-½}\dfrac{(½)^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in [-1,1]$:

$$G_{X_1}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = k)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-½}\frac{(½)^k}{k!}t^k = e^{-½}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^k = e^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{t}{2}}.$$

Remarquons que la série exponentielle converge sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{G_{X_1}(t) = e^{\frac{t-1}{2}}}$$

Q3. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n=1$, on a bien $G_{S_1} = G_{X_1} = \left(G_{X_1}\right)^1$, donc la propriété est vraie au rang $n=1$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$.

  On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, et S_n et X_{n+1} sont indépendantes d'après la question **Q1**, donc :

  $$G_{S_{n+1}} = G_{S_n} G_{X_{n+1}}.$$

  Par hypothèse de récurrence, $G_{S_n} = \left(G_{X_1}\right)^n$ et comme les X_k suivent toutes la même loi, on a $G_{X_{n+1}} = G_{X_1}$, d'où :

  $$G_{S_{n+1}} = \left(G_{X_1}\right)^n G_{X_1} = \left(G_{X_1}\right)^{n+1}.$$

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

La propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{G_{S_n}(t) = \left(G_{X_1}(t)\right)^n}$$

Q4. D'après les deux questions précédentes, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_{S_n}(t) = \left(G_{X_1}(t)\right)^n = e^{\frac{n}{2}(t-1)}.$$

On reconnait la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\frac{n}{2}$. Or, la loi de probabilité d'une variable aléatoire est entièrement définie par la série génératrice, donc :

$$\boxed{\text{La variable } S_n \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \frac{n}{2}.}$$

I.B –

Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(S_n > n\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P\left(S_n = k\right)$, donc :

$$n!\left(\frac{2}{n}\right)^n P\left(S_n > n\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n!\left(\frac{2}{n}\right)^n P\left(S_n = k\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n!\left(\frac{2}{n}\right)^n e^{-n/2}\frac{1}{k!}\left(\frac{n}{2}\right)^k = e^{-n/2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} n!\frac{1}{k!}\left(\frac{n}{2}\right)^{k-n}.$$

En réindexant avec $k' = k-n$ (qui est renommé k), on obtient :

$$n!\left(\frac{2}{n}\right)^n P\left(S_n > n\right) = e^{-n/2}\sum_{k=1}^{+\infty} n!\frac{1}{(k+n)!}\left(\frac{n}{2}\right)^k.$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{n!\left(\frac{2}{n}\right)^n P\left(S_n > n\right) = e^{-n/2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n!n^k}{(n+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{n!}{(n+k)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+k)} = \frac{1}{\prod_{1\leq j\leq k}(n+j)}.$$

Et pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, on a $0 < n \leq n+j \leq n+k$, donc $n^k \leq \prod_{1\leq j\leq k}(n+j) \leq (n+k)^k$ et ainsi :

$$\frac{1}{(n+k)^k} \leq \frac{n!}{(n+k)!} \leq \frac{1}{n^k}.$$

Et en multipliant par $n^k > 0$, on obtient :

$$\boxed{\left(\frac{n}{n+k}\right)^k \leq \frac{n!n^k}{(n+k)!} \leq 1}$$

Q7. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_k(x) = \dfrac{1}{(1+kx)^k}\dfrac{1}{2^k}$.

Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a $(1+kx)^k \geq 1$ et :

$$|u_k(x)| = u_k(x) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Ainsi, u_k est majorée sur $\mathbb{R}_+$, donc $\|u_k\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+}|u_k(x)|$ existe et comme $u_k(0) = \dfrac{1}{2^k}$, on a :

$$\|u_k\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+}|u_k(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}_+}|u_k(x)| = \frac{1}{2^k}.$$

Enfin, comme la série géométrique $\sum \dfrac{1}{2^k}$ converge (car $0 < \dfrac{1}{2} < 1$), la série $\sum \|u_k\|_\infty$ converge, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \textstyle\sum u_k \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}_+.}$$

Q8. Comme la série $\sum u_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, elle converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $u_k\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{-k}\dfrac{1}{2^k}$ et la série $\sum u_k\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge, soit :

$$\boxed{\text{La série } \sum\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\frac{1}{2^k} \text{ converge.}}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto u_k(x)$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}_+$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}_+$. La convergence normale de $\sum u_k$ permet alors de conclure que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

En particulier, en 0, on a :

$$\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(0)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{½}{1-½}=1.$$

Enfin, comme $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}u_k\left(\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}u_k(x)$, soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1}$$

Q9. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}=\left(\frac{n}{n+k}\right)^k.$$

D'après la question **Q6**, on a $\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}=\left(\frac{n}{n+k}\right)^k\le\frac{n!n^k}{(n+k)!}\le 1$, donc :

$$0<\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\le\frac{n!n^k}{(n+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k\le\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Or, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1$, donc par théorème de comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_k\frac{n!n^k}{(n+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge (on le savait déjà avec la question **Q5**) et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\le\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n!n^k}{(n+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k\le 1.$$

Or, d'après la question **Q5**, on a $e^{n/2}n!\left(\frac{2}{n}\right)^n P\left(S_n>n\right)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{n!n^k}{(n+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\le e^{n/2}n!\left(\frac{2}{n}\right)^n P\left(S_n>n\right)\le 1.$$

Avec le résultat de la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty}e^{n/2}n!\left(\frac{2}{n}\right)^n P\left(S_n>n\right)=1.$$

Autrement dit :

$$\boxed{P\left(S_n>n\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-n/2}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n}$$

Q10. A l'aide de la formule de Stirling, $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, et du résultat précédent, on obtient :

$$P(S_n > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n.$$

Comme $0 < \dfrac{\sqrt{e}}{2} = \sqrt{\dfrac{e}{4}} < \sqrt{\dfrac{3}{4}} < 1$, on a :

$$\boxed{P(S_n > n) = \underset{n\to+\infty}{o}(\alpha^n) \text{ avec } \alpha = \frac{\sqrt{e}}{2} \in \left]0,1\right[.}$$

II - Quelques résultats sur les matrices

II.A **–** Ici, $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement positive, soit $a_{i,j} > 0$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$.

Q11. Soit $x = (x_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ (on rappelle que $\mathbb{R}^n$ est identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) et $y = Ax = (y_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$.

Supposons que $x \ge 0$, soit $x_j \ge 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

On a alors $a_{i,j}x_j \ge 0$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, donc $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \ge 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

De plus, si pour $i \in [\![1,n]\!]$ donné, on a $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0$, alors $a_{i,j}x_j = 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ car c'est un somme nulle de termes positifs ou nuls. Et comme, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} > 0$ donc $a_{i,j} \ne 0$, on obtient $x_j = 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, autrement dit $x = 0$. Ainsi, si l'une des composantes de Ax est nulle, alors x est nul.

Finalement, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\begin{array}{l} x \ge 0 \quad \Rightarrow \quad Ax \ge 0 \\ x \ge 0, x \ne 0 \quad \Rightarrow \quad Ax > 0 \end{array}}$$

Q12. Prouvons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k > 0$.

- Pour $k = 1$, la propriété est vraie par hypothèse sur A (A est strictement positive).
- Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$.
  Si on note $c_1, \dots, c_n$ les colonnes de A, on a $c_j > 0$ (donc $c_j \ge 0, c_j \ne 0$) pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ et les colonnes de A^{k+1} sont $A^k c_1, \dots, A^k c_n$.
  Par hypothèse de récurrence, $A^k > 0$, donc $A^k c_j > 0$ d'après la question précédente. Ainsi, tous les coefficients de toutes les colonnes de A^{k+1} sont strictement positifs, donc $A^{k+1} > 0$.
  La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ A^k > 0.}$$

Q13. Ici, $Sp(A)$ est le spectre complexe de A, donc n'est pas vide et $\rho(A)=\max\{|\lambda|, \lambda\in Sp(A)\}$ est bien défini. De plus, $\{|\lambda|, \lambda\in Sp(A)\}\subset\mathbb{R}_+$, donc $\rho(A)\geq 0$ et montrer que $\rho(A)>0$ revient à montrer que $\{|\lambda|, \lambda\in Sp(A)\}\neq\{0\}$, autrement dit que $Sp(A)$ contient une valeur non nulle.

Notons $\chi_A=\prod_{\lambda\in Sp(A)}(X-\lambda)^{n_\lambda}$ le polynôme caractéristique de A (où n_λ est la multiplicité de λ).

Supposons que $Sp(A)=\{0\}$. Alors $\chi_A=X^n$ et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A)=A^n=0_n$. Or, d'après la question précédente, $A^n>0$, ce qui est absurde.

Ainsi, $Sp(A)\neq\{0\}$ et donc :

$$\boxed{\rho(A)>0}$$

Comme $\rho(A)\neq 0$, on peut poser $B=\dfrac{1}{\rho(A)}A$. Montrons que $Sp(B)=\left\{\dfrac{\lambda}{\rho(A)}, \lambda\in Sp(A)\right\}$.

Pour tout $\mu\in\mathbb{C}$, on a :

$$\ker(B-\mu I_n)=\ker\left(\frac{1}{\rho(A)}A-\mu I_n\right)=\ker\left(\frac{1}{\rho(A)}(A-\rho(A)\mu I_n)\right)=\ker(A-\rho(A)\mu I_n).$$

On a donc bien :

$$Sp(B)=\left\{\frac{\lambda}{\rho(A)}, \lambda\in Sp(A)\right\}.$$

Remarquons que ce qui précède prouve aussi que $\ker\left(B-\dfrac{\lambda}{\rho(A)}I_n\right)=\ker(A-\lambda I_n)$ pour tout $\lambda\in Sp(A)$, et donc que les sous-espaces propres de A et B sont les mêmes.

Alors :

$$\begin{aligned}\rho(B)&=\max\{|\mu|, \mu\in Sp(B)\}=\max\left\{\left|\frac{\lambda}{\rho(A)}\right|, \lambda\in Sp(A)\right\}\\&=\max\left\{\frac{1}{\rho(A)}|\lambda|, \lambda\in Sp(A)\right\}=\frac{1}{\rho(A)}\max\{|\lambda|, \lambda\in Sp(A)\}=\frac{1}{\rho(A)}\rho(A)\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\rho\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)=1}$$

Q14. Si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n$ et $P\in GL_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$A=PDP^{-1}$$

avec $D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$.

Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $A^k=PD^kP^{-1}$ avec $D^k=diag(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\dots,\lambda_n^k)$.

On a de plus, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\left|\lambda_j^k\right| = \left|\lambda_j\right|^k \leq \rho(A)^k$, donc si $0 \leq \rho(A) < 1$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \rho(A)^k = 0$ et, avec le théorème des gendarmes, on $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|\lambda_j^k\right| = 0$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} D^k = 0_n$.

Comme l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle est continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Alors :

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = \lim_{k\to+\infty} \left(PD^kP^{-1}\right) = P\left(\lim_{k\to+\infty} D^k\right)P^{-1} = P0_nP^{-1} = 0_n.$$

Ainsi, quand A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\rho(A) < 1$, on a bien :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} A^k = 0_n}$$

***II.B* –** Ici, $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement positive telle que $\rho(A) = 1$, $\lambda \in Sp(A)$ telle que $|\lambda| = \rho(A) = 1$ et $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n$ tel que $x \neq 0$ et $Ax = \lambda x$.

Q15. Si comme plus haut on pose $y = Ax = (y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n$, on a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = \lambda x_i.$$

Donc, $|y_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| = |\lambda x_i| = |\lambda||x_i| = |x_i|$ et avec $a_{i,j} > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on obtient avec l'inégalité triangulaire :

$$|x_i| \leq \sum_{j=1}^n \left|a_{i,j}x_j\right| = \sum_{j=1}^n \left|a_{i,j}\right|\left|x_j\right| = \sum_{j=1}^n a_{i,j}\left|x_j\right|.$$

Comme les $\sum\limits_{i=1}^n a_{i,j}\left|x_j\right|$ sont les composantes de $A|x|$ ceci prouve que :

$$\boxed{|x| \leq A|x|}$$

Q16. On suppose que $A|x| \neq |x|$ (*attention* : ceci ne veut pas dire que $|x| < A|x|$).

Notons $A|x| = (v_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}_+^n$ et $A^2|x| = (w_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}_+^n$ (d'après la question **Q12**, $A^2 > 0$).

On a alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $v_j \geq \left|x_j\right|$ (car $|x| \leq A|x|$) et il existe $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $v_{j_0} > \left|x_{j_0}\right|$ (car $A|x| \neq |x|$).

Alors, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j}v_j \geq a_{i,j}\left|x_j\right|$ et $a_{i,j_0}v_j > a_{i,j}\left|x_{j_0}\right|$. En sommant sur *j*, on obtient pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}v_j > \sum_{j=1}^n a_{i,j}\left|x_j\right| = v_i.$$

De plus, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $v_i=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\left|x_j\right|>0$ (sinon tous les $a_{i,j}\left|x_j\right|$ seraient nuls, donc tous les x_j seraient nuls, car aucun $a_{i,j}$ n'est nul). On peut donc écrire que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\frac{w_i}{v_i}>1$, en particulier $\min_{i\in[\![1,n]\!]}\frac{w_i}{v_i}>1$. En posant alors $\min_{i\in[\![1,n]\!]}\frac{w_i}{v_i}=1+\varepsilon$ avec $\varepsilon>0$, on obtient pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$$\frac{w_i}{v_i}\geq 1+\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad w_i\geq(1+\varepsilon)v_i \quad\Leftrightarrow\quad w_i-v_i\geq\varepsilon v_i\,.$$

Ceci prouve que $A^2|x|-A|x|\geq\varepsilon A|x|$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \varepsilon>0 \text{ tel que } A^2|x|-A|x|\geq\varepsilon A|x|\,.}$$

Q17. De plus, comme $A>0$ et $\frac{1}{1+\varepsilon}>0$, on a $B=\frac{1}{1+\varepsilon}A>0$.

Prouvons par récurrence sur *k* que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $B^kA|x|\geq A|x|$.

- D'après ce qui précède, on a $A^2|x|-A|x|\geq\varepsilon A|x|$, soit :

  $$\frac{1}{1+\varepsilon}A^2|x|=BA|x|\geq A|x|\,.$$

  La propriété est donc vraie au rang $k=1$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $k\in\mathbb{N}^*$, soit $B^kA|x|\geq A|x|$.

  On a alors $B^kA|x|-A|x|\geq 0$ et, comme $B>0$, la question **Q11** permet de conclure que :

  $$B\left(B^kA|x|-A|x|\right)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad B^{k+1}A|x|-BA|x|\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad B^{k+1}A|x|\geq BA|x|\,.$$

  Et avec $BA|x|\geq A|x|$, on obtient :

  $$B^{k+1}A|x|\geq A|x|\,.$$

  La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{B^kA|x|\geq A|x|}$$

Q18. On a $B=\frac{1}{1+\varepsilon}A$. On prouve comme dans la question **Q13** que $Sp(B)=\left\{\frac{\lambda}{1+\varepsilon},\lambda\in Sp(A)\right\}$ et donc on a (avec $\varepsilon>0$) :

$$\rho(B)=\frac{\rho(A)}{1+\varepsilon}=\frac{1}{1+\varepsilon}<1\,.$$

De plus, on a vu dans la question que $B > 0$, et donc d'après le résultat admis à l'issue de la question **Q14**, on peut conclure que :

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} B^k = 0_n}$$

Q19. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = \left(b_{i,j}^{(k)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

En reprenant la notation $A|x| = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k A|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^{(k)} v_j\right)_{1 \leq i \leq n}$.

D'après la question précédente, on a pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\lim_{k \to +\infty} b_{i,j}^{(k)} = 0$, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^{(k)} v_j = 0.$$

Et ainsi :

$$\lim_{k \to +\infty} B^k A|x| = 0.$$

Ceci contredit les questions **Q15** et **Q17** qui permettent de conclure que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k A|x| \geq A|x| \geq |x|$ avec $x \neq 0$.

Ainsi, l'hypothèse $A|x| \neq |x|$ mène à une contradiction et donc :

$$\boxed{A|x| = |x|}$$

II.C –

Q20. D'après ce qui précède, il existe un vecteur non nul $z = |x| \geq 0$ tel que $Az = z$, donc 1 est valeur propre de *A*. De plus, on a $A(Az) = Az$ et donc Az est aussi un vecteur propre de *A*, associé à la valeur propre 1.

Or, $z \geq 0$ et $z \neq 0$, donc, d'après la question **Q11**, on a $Az > 0$ et ainsi :

La matrice *A* admet un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre 1.

Q21. Soit $\lambda \in Sp(A)$ telle que $|\lambda| = 1$ et $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à λ.

On a $Ax = \lambda x$, donc $|Ax| = |\lambda x| = |x|$ et, d'après la partie ***II.B***, $A|x| = |x|$. Alors, $|Ax| = A|x|$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} x_j|.$$

Le résultat admis dans l'énoncé est donné pour des nombres complexes non nuls, mais quitte à prendre $\lambda_j = 0$ pour $z_j = 0$, on peut l'étendre à $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des nombres complexes non *tous* nuls.

Ainsi, il existe un indice $p \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_p \neq 0$ (on peut prendre p égal au plus petit indice j tel que $x_j \neq 0$) et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}_+$ tel que $a_{i,j}x_j = \alpha_{i,j}a_{i,p}x_p$ et donc, avec $Ax = \lambda x$, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}a_{i,p}x_p = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right)a_{i,p}x_p = \lambda x_i .$$

En particulier, en prenant $i = p$, on a $\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{p,j}\right)a_{p,p}x_p = \lambda x_p$ et comme $x_p \neq 0$, on obtient $\lambda = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{p,j}\right)a_{p,p} \in \mathbb{R}_+$. Avec $|\lambda| = 1$, la seule possibilité est $\lambda = 1$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{1 est la seule valeur propre de module 1 de } A.}$$

Q22. Conservons les mêmes notations que dans la question précédente ($x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est donc maintenant un vecteur propre associé à 1). D'après ce que l'on vient de voir, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right)a_{i,p}x_p = \mu_i x_p$$

avec $\mu_i \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, $x = x_p\mu$ avec $\mu \in (\mathbb{R}_+)^n$.

Comme A est une matrice réelle et 1 est aussi un réel, $E_1(A) = \ker(A - I_n)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Nous venons donc d'établir que pour tout $x \in E_1(A)$, x est colinéaire à un vecteur non nul et à coordonnées positives, autrement dit, toutes les coordonnées de x sont de même signe.

Supposons alors que $\dim E_1(A) \geq 2$. Soient e_1 et e_2 deux vecteurs de $E_1(A)$, non colinéaires et à coordonnées positives.

Si on note $e_1 = (e_{1,1}, e_{1,2}, \dots, e_{1,n})$ et $e_2 = (e_{2,1}, e_{2,2}, \dots, e_{2,n})$ où les $e_{i,j}$ sont des réels positifs.

Il existe $a, b \in [\![1,n]\!]$ tels que $\begin{vmatrix} e_{1,a} & e_{2,a} \\ e_{1,b} & e_{2,b} \end{vmatrix} = e_{1,a}e_{2,b} - e_{1,b}e_{2,a} \neq 0$ (car e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires).

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e_1 + te_2 \in E_1(A)$, donc les $e_{1,i} + te_{2,i}$ sont tous de même signe. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = (e_{1,a} + te_{2,a})(e_{1,b} + te_{2,b}) = e_{2,b}e_{2,a}t^2 + (e_{1,a}e_{2,b} + e_{1,b}e_{2,a})t + e_{1,a}e_{1,b} \geq 0 .$$

Or, le discriminant de ce trinôme est :

$$(e_{1,a}e_{2,b} + e_{1,b}e_{2,a})^2 - 4e_{2,b}e_{2,a}e_{1,a}e_{1,b} = (e_{1,a}e_{2,b} - e_{1,b}e_{2,a})^2 > 0 .$$

Donc P admet deux racines réelles distinctes, ce qui implique que P change de signe sur $\mathbb{R}$, ce qui est contradictoire avec $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, supposer que $\dim E_1(A) \geq 2$ mène à une contradiction, donc $\dim E_1(A) \leq 1$ et comme $E_1(A)$ est de dimension au moins 1 :

$$\boxed{\dim E_1(A) = 1}$$

Q23. Rappelons la **proposition 1** :

> Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive, alors $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A (c'est-à-dire $\rho(A)$). Le sous-espace propre associé $E_{\rho(A)}(A)$ est de dimension 1 et dirigé par un vecteur propre strictement positif.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive.

On a vu dans la question **Q13** que $\rho(A) > 0$ et que si $B = \dfrac{1}{\rho(A)} A$, alors :

- B est strictement positive et $\rho(B) = 1$;
- $Sp(A) = \{\rho(A)\lambda, \lambda \in Sp(B)\}$ et $E_{\rho(A)}(A) = E_1(B)$;

Les parties ***II.B*** et ***II.C*** ont permis d'établir que 1 est valeur propre de *B* (question **Q19**), que c'est la seule valeur propre de *B* de module 1 (question **Q21**), que *B* admet un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre 1 (question **Q20**) et que $\dim E_1(B) = 1$.

Avec $Sp(A) = \{\rho(A)\lambda, \lambda \in Sp(B)\}$ et $E_{\rho(A)}(A) = E_1(B)$, on en déduit immédiatement que $\rho(A)$ est valeur propre de *A*, c'est la seule valeur propre de *A* de module $\rho(A)$, *A* admet un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre $\rho(A)$ et $\dim E_{\rho(A)}(A) = 1$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{La proposition 1 est prouvée.}}$$

II.D **–** Ici, $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement positive et diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Pour tous $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$, on note $Y_p = \left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$.

Q24. On considère $\lambda \in S = Sp(A) \setminus \{\rho(A)\}$, donc $|\lambda| < \rho(A)$, et $Y \in E_\lambda(A)$, donc $AY = \lambda Y$.

On a $A^0 Y = Y = \lambda^0 Y$ et si pour $p \in \mathbb{N}$, $A^p Y = \lambda^p Y$, alors :

$$A^{p+1}Y = AA^pY = A(\lambda^p Y) = \lambda^p AY = \lambda^p(\lambda Y) = \lambda^{p+1}Y.$$

Ceci prouve par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^pY = \lambda^pY$ et donc :

$$Y_p = \frac{1}{\rho(A)^p} A^pY = \frac{1}{\rho(A)^p}\lambda^pY = \left(\frac{\lambda}{\rho(A)}\right)^p Y.$$

Comme $|\lambda| < \rho(A)$, on a $\left|\dfrac{\lambda}{\rho(A)}\right| < 1$ et donc $\left(\dfrac{\lambda}{\rho(A)}\right)^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} Y_p = 0}$$

Q25. Posons $D = E_{\rho(A)}(A)$ (d'après la question **Q23**, D est une droite dirigée par un vecteur X_0 de $\mathbb{R}^n$, strictement positif) et $H = \underset{\lambda \in S}{\oplus} E_\lambda(A)$ où l'on a toujours $\lambda \in S = Sp(A) \setminus \{\rho(A)\}$.

Comme A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, on a :

$$\mathbb{C}^n = \underset{\lambda \in Sp(A)}{\oplus} E_\lambda(A) = D \oplus H .$$

Or, D est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ (sous-espace propre d'une matrice *réelle*, associé à une valeur propre *réelle*), donc H est aussi une sous espace de $\mathbb{R}^n$, et on a :

$$\mathbb{R}^n = D \oplus H .$$

Alors, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ strictement positif, on a :

$$Y = \alpha X_0 + \sum_{\lambda \in S} Y_\lambda$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Y_\lambda \in E_\lambda(A)$ pour tout $\lambda \in S$ (et $\sum_{\lambda \in S} Y_\lambda \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$Y_p = \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y = \frac{1}{\rho(A)^p} A^p \left(\alpha X_0 + \sum_{\lambda \in S} Y_\lambda\right) = \frac{1}{\rho(A)^p}\left(\alpha A^p X_0 + \sum_{\lambda \in S} A^p Y_\lambda\right)$$

$$= \frac{1}{\rho(A)^p}\left(\alpha \rho(A)^p X_0 + \sum_{\lambda \in S} \lambda^p Y_\lambda\right) = \alpha X_0 + \sum_{\lambda \in S}\left(\frac{\lambda}{\rho(A)}\right)^p Y_\lambda$$

Comme dans la question précédente, on a $\left(\frac{\lambda}{\rho(A)}\right)^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ pour tout $\lambda \in S$, donc :

$$\lim_{p \to +\infty} Y_p = \alpha X_0 .$$

Or, αX_0 est le projeté de Y sur D parallèlement à H, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (Y_p)_{p \in \mathbb{N}} \text{ converge vers le projeté de } Y \text{ sur } D = E_{\rho(A)}(A) \text{ parallèlement à } H = \underset{\lambda \in S}{\oplus} E_\lambda(A).}$$

On vient de voir que αX_0 est le projeté de Y sur D parallèlement à H.

D'après **Q12**, A^p est strictement positive pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc $\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p$ est aussi strictement positive pour tout $p \in \mathbb{N}$ (car $\rho(A) > 0$ d'après **Q13**). Or, Y est positif, donc d'après **Q11**, le vecteur $Y_p = \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$ est positif pour tout $p \in \mathbb{N}$. Or, $\lim_{p \to +\infty} Y_p = \alpha X_0$, les coordonnées de αX_0 sont limites de suites de réels positifs et donc :

$$\alpha X_0 \text{ est positif.}$$

Enfin, comme X_0 est strictement positif, αX_0 est soit nul (quand $\alpha = 0$), soit strictement positif (quand $\alpha \neq 0$, donc $\alpha > 0$).

Ainsi, toujours avec $D = E_{\rho(A)}(A)$ et $H = \underset{\lambda\in S}{\oplus} E_\lambda(A)$:

$$\boxed{\text{S'il est non nul, le projeté de } Y \text{ sur } D \text{ parallèlement à } H \text{ est strictement positif.}}$$

II.E – Ici, A est toujours une matrice strictement positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q26. Le polynôme caractéristique (réel) de A est scindé sur $\mathbb{C}$, donc A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, autrement dit, il existe deux matrices $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$ et les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres complexes (distinctes ou non) de A : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $A^k = PT^kP^{-1}$ où T^k est une matrice triangulaire supérieure (le sous-espace des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit) dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ (les coefficients diagonaux du produit de deux matrices triangulaires supérieures sont les produits des coefficients diagonaux des deux matrices).

Ainsi :

> Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres complexes de A élevées à la puissance k.

Q27. D'après ce qui précède et en conservant les mêmes notations, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$Tr(A^k) = Tr(PT^kP^{-1}) = Tr(T^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k, \dots + \lambda_n^k.$$

Quitte à renuméroter les valeurs propres, on peut prendre $\lambda_1 = \rho(A)$. Comme $\rho(A)$ est la valeur propre dominante de A, $\dim E_{\rho(A)}(A) = 1$ et on a $|\lambda_p| < \rho(A)$ pour tout $p \in [\![2, n]\!]$.

Alors, pour tout $p \in [\![2, n]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\dfrac{\lambda_p}{\rho(A)}\right)^k = 0$, donc :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{Tr(A^k)}{\rho(A)^k} = \lim_{k\to+\infty} \left[1 + \sum_{p=2}^{n} \left(\frac{\lambda_p}{\rho(A)}\right)^k\right] = 1.$$

Alors :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{Tr(A^{k+1})}{Tr(A^k)} = \rho(A) \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{Tr(A^k)}{\rho(A)^{k+1}} \frac{\rho(A)^k}{Tr(A^k)}\right) = \rho(A) \times 1 \times 1.$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{Tr(A^{k+1})}{Tr(A^k)} = \rho(A)}$$

III - Une inégalité relative aux chaînes de Markov

III.A –

Q28. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tous $i,j\in[\![0,N]\!]$, on a $q_{i,j}=P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$.

Pour $i\in[\![0,N]\!]$ fixé, l'application $P_{(X_n=i)}$ est une probabilité sur l'univers Ω.

Or, la famille $\left((X_{n+1}=j)\right)_{j\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'évènements (car $X_{n+1}(\Omega)=[\![0,N]\!]$, donc $\bigcup_{j\in[\![0,N]\!]}(X_{n+1}=j)=\Omega$ et les $(X_{n+1}=j)$ sont deux à deux disjoints). Ainsi, $\displaystyle\sum_{j=0}^{N}P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)=1$, soit pour tout $i\in[\![0,N]\!]$:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{N}q_{i,j}=1}$$

Q29. Comme dans la question précédente, la famille $\left((X_n=i)\right)_{i\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'évènements. Soit $j\in[\![0,N]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$P(X_{n+1}=j)=\sum_{i=0}^{N}P(X_n=i)P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)\quad\Leftrightarrow\quad P(X_{n+1}=j)=\sum_{i=0}^{N}q_{i,j}P(X_n=i).$$

Alors :

$$\begin{pmatrix}P(X_{n+1}=0)\\ \vdots\\ P(X_{n+1}=j)\\ \vdots\\ P(X_{n+1}=N)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{i=0}^{N}q_{i,0}P(X_n=i)\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{N}q_{i,j}P(X_n=i)\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{N}q_{i,N}P(X_n=i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_{0,0}&\cdots&q_{j,0}&\cdots&q_{N,0}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ q_{0,j}&\cdots&q_{j,j}&\cdots&q_{N,j}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ q_{0,N}&\cdots&q_{j,N}&\cdots&q_{N,N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\ \vdots\\ P(X_n=j)\\ \vdots\\ P(X_n=N)\end{pmatrix}.$$

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\Pi_{n+1}=Q^{\mathsf{T}}\Pi_n}$$

Q30. Prouvons alors par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\Pi_n=(Q^{\mathsf{T}})^{n-1}\Pi_1$.

- Pour $n=1$, on a bien $\Pi_1=(Q^{\mathsf{T}})^0\Pi_1$, donc la relation est vraie au rang $n=1$.
- Supposons la relation vraie à un rang $n\in\mathbb{N}^*$. On a alors :

  $$\Pi_{n+1}=Q^{\mathsf{T}}\Pi_n=Q^{\mathsf{T}}(Q^{\mathsf{T}})^{n-1}\Pi_1=(Q^{\mathsf{T}})^{(n+1)-1}\Pi_1.$$

  Donc la relation est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le vecteur Π_n, dont les composantes donne la loi de X_n, est totalement déterminé par *n*, la matrice connue *Q* et Π_1, qui donne la loi de X_1.

Ceci permet de conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*, \text{ la loi de } X_1 \text{ détermine entièrement la loi de } X_n.}$$

III.B – Soit $t\in\mathbb{R}$.

Q31. On a $A(t)=\left(a_{i,j}(t)\right)=\left(q_{i,j}e^{jt}\right)_{i,j\in[\![0,N]\!]}\in\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$.

De plus, par hypothèse, $q_{i,j}>0$ pour tous $i,j\in[\![0,N]\!]$. Comme $e^{jt}>0$ pour tout $j\in[\![0,N]\!]$, la matrice $A(t)$ est strictement positive.

Alors, $A(t)^{\top}$ est aussi une matrice réelle strictement positive, donc, d'après la **proposition 1** et la question **Q13** (pour la stricte positivité de la valeur propre dominante) :

$$\boxed{\text{La matrice } A(t)^{\top} \text{ possède une valeur propre dominante } \gamma(t)>0.}$$

Q31. D'après l'énoncé, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $E\left(e^{tS_n}\right)=\sum_{j=0}^{N}Y_j^{(n)}(t)$ avec :

$$Y^{(n)}(t)=\begin{pmatrix}Y_0^{(n)}(t)\\ \vdots\\ Y_j^{(n)}(t)\\ \vdots\\ Y_N^{(n)}(t)\end{pmatrix}=\left(A(t)^{\top}\right)^{n-1}Z(t)=\left(A(t)^{\top}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}z_0(t)\\ \vdots\\ z_j(t)\\ \vdots\\ z_N(t)\end{pmatrix}=\left(A(t)^{\top}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}P\left(X_1=0\right)\\ \vdots\\ P\left(X_1=j\right)e^{jt}\\ \vdots\\ P\left(X_1=N\right)e^{Nt}\end{pmatrix}.$$

La matrice $A(t)^{\top}$ est strictement positive et le vecteur $Z(t)$ est positif et non nul (car tous les $P\left(X_1=j\right)$ ne peuvent pas être nuls en même : leur somme vaut 1) . Alors, pour tout $n\geq 2$, $\left(A(t)^{\top}\right)^{n-1}$ est strictement positive (**Q12**), donc $Y^{(n)}(t)$ est strictement positif (**Q11**).

Alors, $E\left(e^{tS_n}\right)=\sum_{j=0}^{N}Y_j^{(n)}(t)>0$ et donc $\ln\left(E\left(e^{tS_n}\right)\right)$ est bien défini.

De plus, d'après le résultat entendu de la proposition 2, comme $A(t)^{\top}>0$, $Z(t)\geq 0$ et $Z(t)\neq 0$, on peut écrire :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\gamma(t)\right)^{n-1}}Y^{(n)}(t)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\gamma(t)\right)^{n-1}}\left(A(t)^{\top}\right)^{n-1}Z(t)=X(t)$$

où $X(t)$ est nul ou bien un vecteur directeur strictement positif de $E_{\gamma(t)}\left(A(t)^{\top}\right)$.

En admettant que pour tout $j\in[\![0,N]\!]$, $P\left(X_1=j\right)\neq 0$, le vecteur $Z(t)$ est strictement positif et alors $X(t)$ n'est pas nul (d'après le résultat admis à la fin de la partie ***II.D***).

En notant alors $s(t) > 0$ la somme des composantes de $X(t)$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\gamma(t))^{n-1}} E\left(e^{tS_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\gamma(t))^{n-1}} \sum_{j=0}^{N} Y_j^{(n)}(t) = s(t).$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left[\frac{1}{(\gamma(t))^{n-1}} E\left(e^{tS_n}\right)\right] = \ln\left(s(t)\right).$$

Et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\left[\frac{1}{(\gamma(t))^{n-1}} E\left(e^{tS_n}\right)\right]\right) = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)\times \ln\left(s(t)\right) = 0.$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\ln\left[\frac{1}{(\gamma(t))^{n-1}} E\left(e^{tS_n}\right)\right] &= \frac{1}{n}\left(\ln\left[E\left(e^{tS_n}\right)\right] - (n-1)\ln\left(\gamma(t)\right)\right)\\ &= \frac{1}{n}\ln\left[E\left(e^{tS_n}\right)\right] - \ln\left(\gamma(t)\right) + \frac{1}{n}\ln\left(\gamma(t)\right)\end{aligned}$$

Avec $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\gamma(t)\right) = 0$, on obtient finalement $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left[E\left(e^{tS_n}\right)\right] - \ln\left(\gamma(t)\right) = 0$, soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left[E\left(e^{tS_n}\right)\right] = \ln\left(\gamma(t)\right) = \lambda(t)}$$

III.C –

Q33. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f_n(t) = \frac{1}{n}\ln\left[E\left(e^{tS_n}\right)\right]$.

On admet que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction λ définie dans la question précédente.

Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$|f_n(t) - \lambda(t)| \leq \varepsilon \iff \lambda(t) - \varepsilon \leq f_n(t) \leq \lambda(t) + \varepsilon \iff n\left(\lambda(t) - \varepsilon\right) \leq \ln\left[E\left(e^{tS_n}\right)\right] \leq n\left(\lambda(t) + \varepsilon\right).$$

Ainsi, il existe bien un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{n \geq n_0 \Rightarrow \ln\left[E\left(e^{tS_n}\right)\right] \leq n\left(\lambda(t) + \varepsilon\right)}$$

Q34. La variable aléatoire e^{tS_n} est positive et admet une espérance. On peut donc utiliser l'inégalité de Markov, qui donne pour tout réel $\alpha > 0$:

$$P\left(e^{tS_n} \geq \alpha\right) \leq \frac{E\left(e^{tS_n}\right)}{\alpha}.$$

Avec ce qui précède, on a pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P\left(e^{tS_n} \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha} e^{n(\lambda(t)+\varepsilon)}.$$

Si prend $\alpha = e^{ntam} > 0$ où a est un réel strictement plus grand que 1, on obtient :

$$P\left(e^{tS_n} \geq e^{ntam}\right) \leq e^{-ntam} e^{n(\lambda(t)+\varepsilon)}.$$

Or, si $t > 0$, on a $\left(e^{tS_n} \geq e^{ntam}\right) = (tS_n \geq ntam) = (S_n \geq nam)$ et, comme S_n est positive, l'égalité reste vraie pour $t = 0$, donc pour tous $n \geq n_0$, $a > 1$ et $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{P(S_n \geq nam) \leq e^{-ntam} e^{n(\lambda(t)+\varepsilon)}}$$

Q35. D'après ce qui précède, on a pour tous $n \geq n_0$, $a > 1$ et $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P(S_n \geq nam) \leq e^{-n(tam - \lambda(t) - \varepsilon)}.$$

Ainsi, $P(S_n \geq nam)$, qui ne dépend pas de *t*, est un minorant sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto e^{-n(tam - \lambda(t) - \varepsilon)}$.

Or, $\lambda^*(am) = \sup_{t \geq 0}(tam - \lambda(t))$, donc, avec $n > 0$ et la décroissance et la continuité de la fonction $x \mapsto e^{-x+n\varepsilon}$ (voir la remarque ci-dessous), on peut écrire :

$$e^{-n(\lambda^*(am)-\varepsilon)} = e^{-n\lambda^*(am)+n\varepsilon} = \inf_{t \geq 0}\left[e^{-n(tam-\lambda(t))+n\varepsilon}\right] = \inf_{t \geq 0}\left[e^{-n(tam-\lambda(t)-\varepsilon)}\right].$$

Comme la borne inférieure de $t \mapsto e^{-n(tam - \lambda(t) - \varepsilon)}$ est son plus grand minorant, on en conclut que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout réel $a > 1$, on a :

$$\boxed{P(S_n \geq nam) \leq e^{-n(\lambda^*(am)-\varepsilon)}}$$

Remarque :

Si *f* est une fonction majorée sur $I \subset \mathbb{R}$ avec $M = \sup_{t \in I}(f(t))$ et *g* est une fonction décroissante sur $\overline{f(I)}$ (qui contient *M*) et continue en *M*.

- Pour tout $t \in I$, on a $f(t) \leq M$ et donc $g(M) \leq g(f(t))$, car *g* est décroissante. Ainsi, $g(M)$ minore $g \circ f$.
- Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $f(t_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} M$. Alors, $g(f(t_n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(M)$, car *g* est continue en *M*.

Ceci prouve par caractérisation séquentielle que $g(M) = \inf_{t \in I}(g \circ f(t))$.

Q36. Avec la linéarité de l'espérance, on a :

$$m = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} E(S_n) = \lim_{n \to +\infty} E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \lim_{n \to +\infty} E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{E(X_1) + \ldots + E(X_n)}{n}\right).$$

Comme X_n représente le nombre d'erreurs susceptibles de se produire à l'instant *n*, $E(X_n)$ représente le nombre moyen d'erreurs se produisant à l'instant *n*.

Alors, $\dfrac{E(X_1)+...+E(X_n)}{n}$ s'interprète comme le nombre moyen d'erreurs se produisant par instant entre les instants 1 et *n*. Et quand *n* devient grand ($n \to +\infty$), $\dfrac{E(X_1)+...+E(X_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$, donc :

> Le nombre *m* s'interprète comme le nombre moyen d'erreurs se produisant à chaque instant lors du processus industriel.

Comme $P\left(S_n \geq nam\right) = P\left(\dfrac{1}{n}S_n \geq am\right)$, le résultat de la question précédente peut se récrire pour tout entier $n \geq n_0$ et tout réel $a > 1$:

$$P\left(\frac{1}{n}S_n \geq am\right) \leq e^{-n\left(\lambda^*(am)-\varepsilon\right)}.$$

Or, la variable aléatoire $\dfrac{1}{n}S_n = \dfrac{X_1+...+X_n}{n}$ représente le nombre moyen d'erreurs se produisant entre les instants 1 et *n*, donc $P\left(\dfrac{1}{n}S_n \geq am\right)$ est la probabilité que se produisent en moyenne plus de am erreurs par instant, entre les instants 1 et *n*.

Comme $a > 1$ et $m > 0$, on a $\lambda^*(am) > 0$ d'après ce qui est admis dans l'énoncé. On peut donc prendre $\varepsilon \in \left]0, \lambda^*(am)\right[$ et dans ce cas, on a $\lambda^*(am) - \varepsilon > 0$.

Alors, $e^{-n\left(\lambda^*(am)-\varepsilon\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la décroissance de $\left(e^{-n\left(\lambda^*(am)-\varepsilon\right)}\right)_{n\geq n_0}$ est rapide (exponentielle).

Donc :

> La probabilité que se produisent en moyenne plus de am erreurs par instant devient rapidement très faible quand on répète beaucoup la tache répétitive.

III.D –

Q37. Question bien vague… Qu'entend par « raisonnable » ?

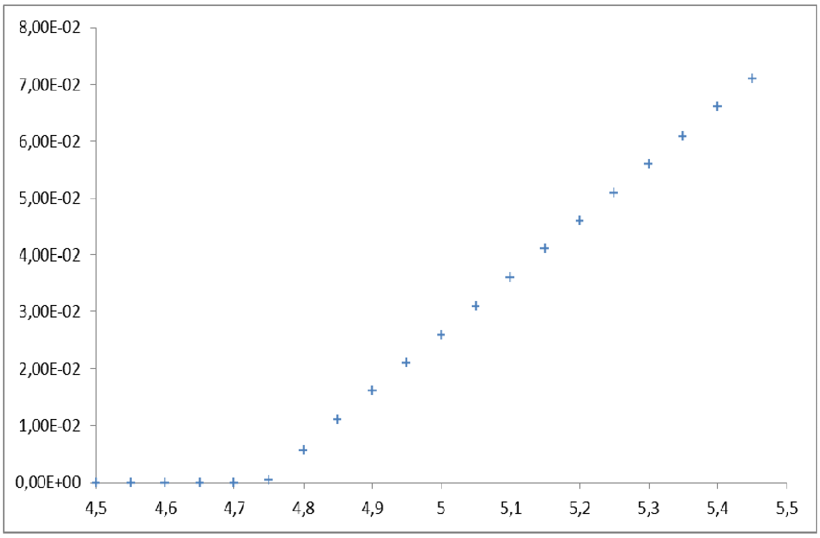
Pour $i \in [\![1, L]\!]$ donné, on a $\lambda^*(x_i) = \sup_{t\geq 0}\left(tx_i - \lambda(t)\right)$. Or, pour évaluer $tx_i - \lambda(t)$, on n'a que les valeurs $t_1x_i - \hat{\lambda}(t_1), t_2x_i - \hat{\lambda}(t_2), \dots, t_Kx_i - \hat{\lambda}(t_K)$, donc pour estimer $\lambda^*(x_i)$, la seule chose que l'on puisse faire est de prendre la plus grande des *K* valeurs ci-dessus, soit $\lambda^*(x_i) = \max\limits_{1\leq j\leq K}\left(t_jx_i - \hat{\lambda}(t_j)\right)$.

De là à dire que cette estimation est bonne…

Q38. D'après l'énoncé, on a :

$$\begin{cases} \lambda^*(x) = 0 \text{ quand } x \leq m \\ \lambda^*(x) > 0 \text{ quand } x > m \end{cases}$$

Si avec les données fournies, on trace la courbe de λ^* en fonction x, on obtient :



On constate que la courbe se sépare de l'axe des x quand $x = 4,75$, donc $\lambda^*(x) = 0$ quand $x \leq 4,7$ et $\lambda^*(x) > 0$ quand $x \geq 4,75$. On peut donc estimer que :

$$\boxed{4,7 \leq m \leq 4,75}$$

D'après la question **Q35**, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout réel $a > 1$, donc pour $a = 1,1$, on a pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P\left(S_n \geq 1,1 \times nm\right) \leq e^{-n\left(\lambda^*(1,1m) - \varepsilon\right)}.$$

De plus, comme $\left(S_n > nam\right) \subset \left(S_n \geq nam\right)$, on a $P\left(S_n > nam\right) \leq P\left(S_n \geq nam\right)$ et donc

En prenant $a = 1,1 > 1$, on a donc pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P\left(S_n > 1,1 \times nm\right) \leq e^{-n\left(\lambda^*(1,1m) - \varepsilon\right)}.$$

Avec $4,7 \leq m \leq 4,75$, on a $5,17 \leq 1,1m \leq 5,23$, donc d'après les valeurs fournies, $\lambda^*(1,1m) \approx 0,046$, donc

$$P\left(S_n > 1,1 \times nm\right) \leq e^{-n(0,046 - \varepsilon)}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{On peut prendre } h = 0,046 - \varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon \in \left]0;0,046\right[.}$$